Département de Mathématiques
Université de Fribourg (Suisse)

Sur la stabilité des E-feuilletages

THESE

présentée à la Faculté des Sciences
de l'Université de Fribourg (Suisse)
pour l'obtention du grade de
Doctor scientiarum mathematicarum

par

Laurent Karth

de Lessoc (Fribourg)

Thèse n° 1390
Imprimerie Saint-Paul
2002

Acceptée par la Faculté des Sciences de l'Université de Fribourg (Suisse) sur la proposition du jury :

Prof. Norbert Hungerbühler, Université de Fribourg, président du jury

Prof. Burchard Kaup, Université de Fribourg, directeur de thèse
Prof. Harald Holmann, Université de Fribourg, corapporteur
Prof. Hans-Jörg Reiffen, Universität Osnabrück, corapporteur

Fribourg, le 1er octobre 2002.

Prof. Burchard Kaup

Directeur de thèse

B. Kaup

Prof. Dionys Baeriswyl

D. Baeriswyl

Doyen

“C’est au pied du mur que l’on voit le mieux le mur.”

Proverbe chinois

Remerciements

Lorsque je suis sorti du collège, j'ai dû choisir vers quelle branche j'allais me diriger : la physique ou les mathématiques ? Bon, allons pour les mathématiques, en plus ça a l'air sympa à Fribourg. Première année, deuxième année, tout allait bien. En troisième, j'ai pu commencer à choisir mes cours : c'est l'analyse complexe qui m'a le plus attiré et j'ai fait mon travail de diplôme dans ce domaine. Parfait. Que faire maintenant ? Et si je creusais un peu plus l'analyse complexe en faisant un doctorat ? Me voici thésard[1] ! Mais là, c'est une autre paire de manche : fini les séries d'exercices résolues en groupe et leurs corrections reçues la semaine suivante. Bienvenu au royaume de l'incertitude ! Je me retrouvais donc dans un autre monde à l'intérieur duquel je n'aurais pu me débrouiller sans l'appui d'autres personnes.

Je tiens tout d'abord à remercier M. le Professeur Burchard Kaup pour m'avoir encadré tout au long de ma thèse. J'ai apprécié sa grande disponibilité. Il a toujours réussi à trouver le temps de m'accueillir dans son bureau et de me guider. Il m'a transmis, je l'espère, son souci de la didactique et sa sensibilité rédactionnelle. Sans lui, je n'aurais jamais fini mon doctorat.

Ma gratitude va aussi à M. le Professeur H. Holmann qui m'a donné le goût de l'analyse complexe et qui m'a introduit dans son groupe de recherche. Les discutions que nous avons eues ont toujours été très fructueuses. En outre, je lui suis reconnaissant d'avoir accepté d'être mon corapporteur.

M. le Professeur H.-J. Reiffen était mon expert externe. Lors de mon séjour a Osnabrück, j'ai été impressionné par la précision de sa lecture et le recul qu'il avait par rapport à mon travail. Plusieurs de ses suggestions sont venues enrichir cette thèse. Je le remercie pour son hospitalité et pour tout le temps qu'il m'a consacré.

Lorsque l'on fait de la recherche, on se trouve souvent seul face à un feuille blanche, seul à essayer de résoudre un problème sans pouvoir partager ses espérances et ses échecs. Cependant, j'ai eu la chance de travailler au sein du groupe d'analyse complexe de mon département. Les nombreux échanges que nous avons eus m'ont permis de rompre avec cette solitude, d'avoir de nouvelles idées et d'améliorer mes résultats. Toute ma reconnaissance va aux personnes qui ont œuvré pour ce groupe.

[1] La première année de ce travail a été subventionnée par le Font National Scientifique Suisse, subvention 20-50579.97.

Je me suis effectivement retrouvé de nombreuses fois seul devant une feuille blanche, mais je n'étais pas seul dans mon bureau. Merci à Denis pour m'avoir toujours encouragé, écouté et fait profité de son expérience. Denis parti, c'est Fabien qui a pris la relève. Sa bonne humeur permanente et les nombreux moments passés ensemble ont fait passer ma dernière année de thèse comme une lettre à la poste.

Un des atouts de l'Université de Fribourg est le bilinguisme : merci à tous les germanophones qui ont pris le temps de corriger ce que j'essayais d'écrire dans la langue de Goethe.

Finalement, je voudrais encore faire part de ma gratitude aux membres de ma famille et aux amis qui m'ont soutenu tout au long de ce travail. Une attention particulière va à Lyse qui continue de contribuer à ma réussite et mon bonheur.

Résumé

Dans ce travail, nous résolvons un cas particulier du problème standard de la théorie des feuilletages qui est de trouver des conditions pour la stabilité d'une feuille compacte : une feuille compacte est stable si elle possède un système fondamental de voisinages saturés par rapport à la relation d'équivalence définie par les feuilles du feuilletage. Comme de nombreuses variétés différentiables ne possèdent pas de feuilletage, au sens classique, non trivial, nous nous intéressons à des feuilletages avec singularités et plus particulièrement aux E-feuilletages : un E-feuilletage $\mathbb{F}$ a la propriété d'être localement décrit par une application holomorphe appelée $\mathbb{F}$-carte qui sépare les feuilles, c'est-à-dire une application qui factorise localement la projection canonique sur l'espace des feuilles. Ces feuilletages ont été étudiés pour la première fois dans la thèse de Egger.

Pour une feuille compacte d'un E-feuilletage $\mathbb{F}$, il n'est pas possible de définir un groupe d'holonomie car il n'y a pas de compatibilité biholomorphe entre les $\mathbb{F}$-cartes. La compatibilité entre deux $\mathbb{F}$-cartes $f_j : U_j \longrightarrow V_j$, $j = 1, 2$, est donnée par une famille d'applications $(u_j : Z \longrightarrow V_j)_{j\in\{1,2\}}$ appelée mont. Le comportement de $\mathbb{F}$ autour d'une feuille compacte est décrit par une famille finie de monts appelée massif que nous obtenons en recouvrant la feuille par un nombre fini de $\mathbb{F}$-cartes. Nous reprenons et continuons dans cette thèse le travail de Egger en proposant une étude catégorique plus poussée des massifs. Ceci nous permet de définir différemment et plus simplement les germes d'holonomie, l'analogue au groupe d'holonomie que Egger a introduit.

Les germes d'holonomie, dans le sens où nous les avons définis, nous donnent aussi un critère de stabilité. L'étude des germes d'holonomie définie par des E-feuilletages compacts de codimension 1 nous permet alors de démontrer que tous ces feuilletages sont stables : un feuilletage compact est stable si toutes ses feuilles sont stables. Il suit du théorème de Mattei-Moussu et du critère de simplicité de Reiffen que tous les feuilletages holomorphes compacts de codimension 1 définis sur une variété sont des E-feuilletages, nous avons donc trouvé une nouvelle démonstration de la stabilité de ces feuilletages.

Abstract

In this work, we solve a particular case of a standard problem of the theory of foliations which is to find conditions for the stability of a compact leaf. A compact leaf is stable if it possesses a fundamental system of neighborhoods saturated with respect to the equivalence relation defined by the leafs of the foliation. Since a lot of manifolds do not possess any foliation in the classical sense, that is not trivial, we study foliations with singularities and in particular the E-foliations. An E-foliation has the property to be locally described by a holomorphic mapping named $\mathbb{F}$-chart which separates the leafs, i.e. a mapping that factorizes locally the canonical projection on the leafs space. This foliations have been studied first by Egger in his thesis.

For a compact leaf of an E-foliation $\mathbb{F}$ it is not possible to define a holonomy group since there is no biholomorphic compatibility between the $\mathbb{F}$-charts. The compatibility between two $\mathbb{F}$-charts $f_j : U_j \longrightarrow V_j,\ j = 1, 2$, is given by a family of applications $(u_j : Z \longrightarrow V_j)_{j\in\{1,2\}}$ named a mountain. In order to know the behavior around a compact leaf we cover it with a finite number of $\mathbb{F}$-charts and we obtain a finite family of mountains named massif. We develop further and complement the work of Egger proposing a more advanced categorical study of the massifs. This allows us to define the holonomy germs, i.e. the analogue to the holonomy group Egger introduced, in a different and simpler way .

The holonomy germs, in the sense we defined them, also give a stability criterion. The study of the holonomy germs defined by 1-codimensional compact E-foliations allows us to prove the stability of these foliations. A compact foliation is stable if all its leafs are stable. The theorem of Mattei-Moussu and the simplicity criterion of Reiffen imply that all the 1-codimensional compact foliations defined on a manifold are E-foliations. Thus we have found a new proof of their stability.

Table des matières

Introduction

Un feuilletage différentiable de dimension p sur une variété différentiable est une relation d'équivalence dont les classes d'équivalence, appelées feuilles, sont des variétés connexes immergées de dimension p. De plus, cette relation d'équivalence doit être localement décrite par des submersions appelées feuilletages locaux.

Considérons un feuilletage différentiable $\mathbb{F}$ sur une variété différentiable X et L une feuille compacte de $\mathbb{F}$. Le problème suivant se pose :

Problème *Sous quelle condition la feuille L est-elle stable, c'est-à-dire sous quelle condition L possède-t-elle un système fondamental de voisinages saturés par rapport à la relation d'équivalence $R^{\mathbb{F}}$ définie sur X par les feuilles de $\mathbb{F}$?*

Dans [Ree52], Reeb montre que tous les feuilletages différentiables compacts (c'est-à-dire dont toutes les feuilles sont compactes) de codimension 1 sont stables (c'est-à-dire toutes les feuilles sont stables) et donne un exemple de feuilletage différentiable compact de codimension 2 instable défini sur une variété non-compacte. Reeb et Haefliger conjecturent que tous les feuilletages différentiables compacts définis sur une variété différentiable compacte sont stables. Edwards, Millett, Sullivan et Vogt démontrent cette conjecture dans le cas de codimension 2 (voir [EMS77] et [Vog76]). Dans [EV78], Epstein et Vogt donnent des contre-exemples au cas de codimension 3. Le groupe d'holonomie d'une feuille compacte (une généralisation de l'application de premier retour de Poincaré) nous donne le critère de stabilité suivant dû à Reeb et Epstein (voir [Ree52] et [Eps76]) :

Théorème *Soit $\mathbb{F}$ un feuilletage différentiable sur une variété différentiable X à topologie dénombrable et L une feuille compacte de $\mathbb{F}$. Si le groupe d'holonomie de L est fini, alors il existe un voisinage $U \Subset X$ de L tel que $\mathbb{F}|_U$ soit compact et stable. De plus, si $\mathbb{F}$ est compact, alors $\mathbb{F}$ est stable si et seulement si le groupe d'holonomie de chaque feuille de $\mathbb{F}$ est fini.*

Un feuilletage holomorphe régulier sur une variété complexe est défini de façon analogue à un feuilletage différentiable. Dans [BB72], remarque (c) page 287, Baum et Bott constatent que de nombreuses variétés complexes ne possèdent pas de feuilletage holomorphe non trivial. Cette remarque motive donc l'introduction de feuilletages avec singularités. Dans [Hol72], Holmann généralise la notion de feuilletage holomorphe régulier en admettant pour les feuilletages locaux des applications holomorphes simples, localement simples, ouvertes, deux à deux localement biholomorphiquement compatibles. De plus, l'espace ambiant est un espace complexe réduit. Bohnhorst et Reiffen donnent à ces feuilletages le nom de H-feuilletages. Dans [BR85], Bohnhorst et Reiffen généralisent encore la notion de feuilletage sur des espaces complexes réduits. Pour eux, un feuilletage holomorphe singulier sur un espace complexe réduit X est une paire $(A, \mathbb{F}_A)$ où $A \subset X$ est un ensemble analytique et $\mathbb{F}_A$ un feuilletage holomorphe régulier défini sur $X \smallsetminus A$. Dans [Rei87], Reiffen donne une définition précise des feuilles d'un feuilletage défini sur un espace complexe réduit.

Dans [Hol78] et [Kau78], Holmann et Kaup démontrent que tous les H-feuilletages compacts de codimension 1 sont stables. Plus tard, Holmann, Kaup et Reiffen démontrent que tous les feuilletages holomorphes singuliers compacts de codimension 1 définis sur des variétés complexes paracompactes sont stables (voir [HKR98]). Dans [Mue79], Mueller donne un exemple de feuilletage holomorphe régulier compact instable de codimension 2 défini sur une variété complexe non compacte. La conjecture de Reeb et Haefliger est donc encore ouverte dans le cas holomorphe. Dans [Hol78], Holmann donne le critère suivant :

Théorème *Si $\mathbb{F}$ est un H-feuilletage compact sur un espace complexe normal X et L une feuille compacte de $\mathbb{F}$, alors les énoncés suivants sont équivalents :*

(i) *L est stable.*

(ii) *L est inclu dans le good set de $\mathbb{F}$.*

(iii) *Le groupe d'holonomie de L est fini.*

Dans sa thèse (voir [Egg80]), Egger s'intéresse à un type particulier de feuilletages holomorphes singuliers que nous appelons des E-feuilletages :

Définition *Un feuilletage holomorphe singulier cohérent $\mathbb{F}$ avec des feuilles partout défini sur un espace complexe normal connexe à topologie dénombrable X est un E-feuilletage si pour tout $x \in X$, il existe une application holomorphe ouverte surjective (appelée $\mathbb{F}$-carte) $f : U \longrightarrow V$, $U \Subset X$, définie dans un voisinage de x, qui a des fibres de dimension égale à la dimension de $\mathbb{F}$ et telle qu'il existe une application $b : V \longrightarrow X/R^{\mathbb{F}} =: X/\mathbb{F}$ telle que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi|_U"'] & V \arrow[dl, "b"] \\ X/\mathbb{F} & \end{tikzcd}$$

où $\pi : X \longrightarrow X/\mathbb{F}$ est la projection canonique.

Une $\mathbb{F}$-carte sépare donc les feuilles et nous verrons que ses ensembles de niveau sont des feuilles locales. De plus, tout H-feuilletage défini sur un espace complexe normal est un E-feuilletage.

Dans son travail, Egger généralise le critère de Holmann (voir [Hol72]) pour l'existence d'une structure complexe canonique sur l'espace des feuilles :

Théorème *Si $\mathbb{F}$ est un E-feuilletage, alors $X/\mathbb{F}$ est un espace complexe si et seulement si $X/\mathbb{F}$ est séparé.*

Pour un E-feuilletage $\mathbb{F}$, nous n'avons pas de compatibilité biholomorphe entre les $\mathbb{F}$-cartes et il n'est donc pas possible de définir des groupes d'holonomie. Cependant, si $f_j\colon U_j \longrightarrow V_j,\ j = 1,2$ sont des $\mathbb{F}$-cartes avec $U_{12} := U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, comme les application $f_1|_{U_{12}}$ et $f_2|_{U_{12}}$ ont les mêmes ensembles de niveau, il existe alors une $\mathbb{F}$-carte $\beta_{12}\colon U_{12} \longrightarrow Z$ et des applications holomorphes ouvertes discrètes $u_j\colon Z \longrightarrow V_j,\ j = 1,2$ telles que le diagramme de la figure 1 commute. Nous obte-

$$\begin{tikzcd}
& U_{12} \arrow[d, "\beta_{12}"] \arrow[ddl, bend right, "f_1|_{U_{12}}"'] \arrow[ddr, bend left, "f_2|_{U_{12}}"] & \\
& Z \arrow[dl, "u_1"'] \arrow[dr, "u_2"] & \\
V_1 & & V_2
\end{tikzcd}$$

FIG. 1: Mont défini par deux $\mathbb{F}$-cartes s'intersectant

nons alors une famille $(u_j\colon Z \longrightarrow V_j)_{j\in\{1,2\}}$ d'applications, ce que nous appelons un mont à deux vallées V_1 et V_2. Pour des points $v_j \in V_j,\ j = 1,2$, s'il existe un point $z \in Z$ avec $(u_1,u_2)(z) = (v_1,v_2)$, alors $f_1^{-1}(v_1)$ et $f_2^{-1}(v_2)$ se trouvent dans la même feuille de $\mathbb{F}$. La transition entre les $\mathbb{F}$-cartes f_1 et f_2 est donc donnée par une relation

$$R := (u_1,u_2)(Z) \cup (u_2,u_1)(Z) \cup \big\{(v,v) : v \in V\big\}$$

sur $V := V_1 \dot\cup V_2$, c'est-à-dire un sous-ensemble de $V \times V$ tel que $(v,v) \in V$ pour tout $v \in V$ et tel que $(v_1,v_2) \in R$ implique $(v_2,v_1) \in R$.

De façon générale, si R est une relation définie sur un espace topologique X, nous définissons par récurrence la $n^{\text{ème}}$ itération de R de la façon suivante :

(a) $R^0 := \big\{(x,x) : x \in X\big\}$,

(b) $R^{n+1} := \Big\{(x,z) \in X \times X : \exists y \in X \text{ avec } \big((x,y),(y,z)\big) \in (R^n \times R) \cup (R \times R^n)\Big\}$.

R définit alors une relation d'équivalence $R^\infty := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R^n$.

Pour étudier le comportement autour d'une feuille compacte L d'un E-feuilletage $\mathbb{F}$, Egger recouvre L "convenablement" au moyen d'un nombre fini de $\mathbb{F}$-cartes $f_j\colon U_j \longrightarrow V_j,\ j \in J$. Il obtient ainsi une famille finie de monts, ce que nous appelons un massif. Si $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow L$ est un lacet avec $x \in L \cap U_{j_0},\ j_0 \in J$, comme point de base qui passe successivement dans les $\mathbb{F}$-cartes $f_{j,0} f_{j_1}, f_{j_2}, \ldots, f_{j_n}$, avec $j_n = j_0$, alors des points de V_{j_0} sont mis en relation avec des points de V_{j_1}, des points V_{j_1} sont mis en relation avec des points de V_{j_2},... et des points de $V_{j_{n-1}}$ sont mis en relation avec des points de V_{j_0}. Nous obtenons donc une nouvelle relation H sur V_{j_0} mais cette relation n'est pas analytique, c'est-à-dire un sous-ensemble analytique de $V_{j_0} \times V_{j_0}$. De plus, les itérés d'une relation analytique ne sont en général pas analytiques. Egger introduit alors la notion de germe de relation : le germe d'une relation R définie sur un espace topologique X en un point $y \in X$ est le germe de l'ensemble $R \subset X \times X$ au point (y, y) et est noté (R, y). Le germe $\big(H, f_{j_0}(x)\big)$ est un germe de relation analytique et est appelé élément d'holonomie de L. Comme il recouvre L par un nombre fini de $\mathbb{F}$-cartes, il lui suffit d'avoir un nombre fini d'éléments d'holonomie pour connaître le comportement de $\mathbb{F}$ autour de L : la réunion de ces éléments d'holonomie est le germe d'holonomie de L.

Le massif définit par le recouvrement d'une feuille compacte L d'un E-feuilletage est un objet qui peut être très compliqué. Dans le but de simplifier les démonstrations de Egger, nous avons élaboré une théorie sur les monts et les massifs. Nous avons trouvé des conditions pour ramener l'étude d'un massif à celle d'un mont à n vallées équivalent. Le massif défini par un recouvrement admissible d'une feuille compacte d'un E-feuilletage satisfait ces conditions et nous utilisons un mont équivalent pour définir un germe d'holonomie de cette feuille : si $M = (u_j : Z \longrightarrow V_j)_{j \in J}$ est une famille finie d'applications (donc un mont) alors l'holonomie de M sur V_{j_0}, $j_0 \in J$ est $H = \bigcup_{j \in J} (u_{j_0} \times u_{j_0})(R^{u_j})$ (R^{u_j} est la relation d'équivalence définie par u_j sur Z) et il ne reste plus qu'à prendre le germe de H au point désiré. Notre définition d'un germe d'holonomie diffère donc de celle de Egger mais nous arrivons aux mêmes résultats tout en évitant de travailler sur le massif défini par le recouvrement. Nous avons alors un analogue au critère de Holmann :

Théorème 5.3.6 *Soit L une feuille compacte d'un E-feuilletage défini sur un espace complexe normal à topologie dénombrable et (H, v) un germe d'holonomie de L. Si toutes les autres feuilles de $\mathbb{F}$ sont fermées, alors les énoncés suivants sont équivalents :*

(i) *L est stable.*

(ii) *L intersecte le good set de $\mathbb{F}$.*

(iii) *$(H, v)^\infty$ est stationnaire.*

La définition du good set de $\mathbb{F}$ est celle donnée par Holmann dans [Hol78]. Si R est un représentant admissible d'un germe de relation (R, x) (dans le cas d'un germe d'holonomie d'une feuille compacte d'un E-feuilletage un tel représentant existe toujours), la $n^{\text{ème}}$ itération de (R, x) est $(R, x)^n := (R^n, x)$. Nous disons que $(R, x)^\infty := \big((R^n, x)\big)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $(R, x)^{n_0+1} = (R, x)^{n_0}$.

Nous avons aussi le résultat suivant qui est semblable au cas réel :

Théorème 5.2.8 *Soit $\mathbb{F}$ un E-feuilletage sur un espace complexe normal X à topologie dénombrable, L une feuille compacte de $\mathbb{F}$ et (H, v) un germe d'holonomie de L. Si $(H, v)^\infty$ est stationnaire, alors il existe un voisinage $R^{\mathbb{F}}$-saturé $A \subset X$ de L tel que $\mathbb{F}|_A$ soit compact et stable.*

Le groupe d'holonomie d'une feuille compacte d'un H-feuilletage de codimension 1 est un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(\mathbb{C},0)$ avec un nombre fini de générateurs. L'étude de ces sous-groupes a permis à Kaup de démontrer la stabilité des H-feuilletages compacts de codimension 1 (voir [Kau78]). Nous faisons un raisonnement analogue pour les E-feuilletages. Le germe d'holonomie d'une feuille compacte d'un E-feuilletage de codimension 1 est le germe d'une relation définie sur un ouvert de $\mathbb{C}$. Une étude de ces relations nous donne le résultat suivant :

Théorème 2.3.4 *Si R est une relation analytique sur un voisinage $X \Subset \mathbb{C}$ de 0 (c'est-à-dire si R est analytique dans $X \times X$), nous n'avons que les deux alternatives suivantes :*

(I) *Pour tout voisinage $U \Subset X$ de 0, il existe $y \in U$ tel que* $\mathrm{Card}(R|_U)^\infty(y) = \infty$.

(II) *Il existe un voisinage $U \Subset X$ de 0 tel que $(R|_U)^\infty$ soit analytique.*

Dans le cas d'un germe d'holonomie (H, v) d'une feuille compacte L d'un E-feuilletage de codimension 1, l'alternative (I) est exclue. Ceci nous permet, via un théorème sur les germes de relation, de conclure que $(H, v)^\infty$ est stationnaire et par conséquent que L est stable. Nous avons donc le théorème suivant :

Théorème 5.4.1 *Si $\mathbb{F}$ est un E-feuilletage compact de codimension 1 sur un espace complexe normal avec une topologie dénombrable, alors $\mathbb{F}$ est stable et $X/\mathbb{F}$ est une surface de Riemann.*

Si $\mathbb{F}$ est un feuilletage holomorphe cohérent compact de codimension 1 défini sur une variété complexe à topologie dénombrable (et non pas un espace complexe normal), il suit du théorème de Mattei-Moussu (voir [MM80]) et du critère de simplicité de Reiffen (voir [Rei82]) que $\mathbb{F}$ est un E-feuilletage. Nous déduisons alors du théorème précédent le théorème de Holmann-Kaup-Reiffen (voir [HKR98]).

Le présent travail se décompose de la façon suivante. Le chapitre 1 contient les diverses notations utilisées et les conventions adoptées. Une section contient les notions sur la théorie des catégories utilisées dans le chapitre 3. Dans le chapitre 2, nous allons étudier les relations, les germes de relations et leurs itérations. Nous nous intéressons plus particulièrement aux relations analytiques et aux germes de relation analytique. Une section est consacrée spécialement aux relations analytiques définies sur un ouvert de $\mathbb{C}$. Dans le chapitre 3, une théorie sur les monts et les massifs est développée à l'aide de la théorie des catégories. L'équivalence mont-massif et l'existence du pushout d'un massif dans la catégorie des espaces complexes et dans la catégorie des germes d'espace complexe sont les points les plus approfondis. Le chapitre 4 introduit les E-feuilletages. Il commence par un rappel sur les feuilletages holomorphes singuliers. Il présente ensuite des résultats généraux sur les E-feuilletages et se termine par un théorème de Egger sur l'existence d'une structure complexe canonique sur l'espace des feuilles. Le chapitre 5 présente l'étude de la stabilité des E-feuilletages à l'aide des germes d'holonomie et du good set. Ce chapitre se termine par la résolution du cas de codimension 1.

Plusieurs énoncés se trouvant dans ce travail ont été démontrés par Egger dans sa thèse. Pour les démonstrations des théorèmes de Egger, nous adopterons la notation suivante :

- "**Preuve** ††" signifie que la preuve présentée ici est celle établie par Egger.
- "**Preuve** †" signifie que la preuve présentée ici est essentiellement celle de Egger mais que quelques ajouts ou modifications y ont été faits.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Notations et conventions

Si X est un ensemble, nous notons Δ_X la relation d'équivalence triviale sur X. Nous notons $\mathrm{Id}_X : X \longrightarrow X$ l'identité sur X. Si nous avons une application $f : X \longrightarrow Y$ entre deux ensembles, f définit alors la relation d'équivalence suivante sur $X \times X$:

$$R^f := \big\{(x_1, x_2) \in X \times X : f(x_1) = f(x_2)\big\}.$$

Pour deux ensembles $A_i, A_j \subset X$, nous définissons $A_{ij} := A_i \cap A_j$.

Soit X un espace topologique et $a \in X$. Nous notons $C_a(X)$ la composante connexe de X contenant a. Pour $A \subset B \subset X$, nous notons $\mathrm{Ad}_B(A)$ l'adhérence de A dans B. Soit Y un autre espace topologique et $f : X \longrightarrow Y$ une application. f est quasi-finie si $f^{-1}(y)$ est un ensemble fini pour tout $y \in Y$. L'application f est finie si elle est discrète et propre. Pour un point $a \in X$, nous notons X_a le germe de X en a et f_a le germe de f en a .

Tous les espaces complexes que nous rencontrerons seront des espaces complexes réduits, nous ne le mentionnerons donc plus. Pour un espace complexe X, nous notons $\mathrm{Sing}\, X$ l'ensemble des singularités de X, ${}_X\mathcal{O}$ le faisceau des fonctions holomorphes sur X, ${}_X\Omega$ le faisceau des formes différentielles holomorphes sur X et ${}_X\Theta$ le faisceau des champs vectoriels holomorphes sur X. Pour un sous-faisceau cohérent analytique $\mathcal{G}$ de ${}_X\Omega$, nous définissons les faisceaux suivants :

$$\mathcal{G}^\perp := \{\theta \in {}_X\Theta_x : x \in X, \langle\theta, \omega\rangle = 0 \ \forall \omega \in \mathcal{G}_x\},$$

$$\widetilde{\mathcal{G}} := \{\omega \in {}_X\Omega_x : x \in X, \langle\theta, \omega\rangle = 0 \ \forall \theta \in \mathcal{G}_x^\perp\}.$$

$\widetilde{\mathcal{G}}$ est la ***complétion*** de Ω. Nous disons que $\mathcal{G}$ est ***complet*** si $\widetilde{\mathcal{G}} = \mathcal{G}$. Si $\mathcal{G}$ est un faisceau cohérent, les faisceaux $\mathcal{G}^\perp$ et $\widetilde{\mathcal{G}}$ sont aussi cohérents. $\mathcal{G}$ est ***involutif***, s'il existe un ensemble analytique $A \subset X$ nulle part dense dans X avec $\mathrm{Sing}\, X \subset A$ tel que $\mathcal{G}_{X \smallsetminus A}$ est involutif, c'est-à-dire $\mathrm{d}\omega \wedge \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_r = 0$ pour tout $\omega, \omega_1, \ldots, \omega_r \in \mathcal{G}_x$ et pour tout $x \in X \smallsetminus A$ avec $r = \mathrm{rang}\, \mathcal{G}_x$.

1.2 Théorie des catégories

Nous allons voir dans cette section quelques définitions que nous utiliserons pour formuler notre théorie sur les massifs (pour plus de détails, voir par exemple [AHS90]). Une liste de toutes les catégories avec lesquelles nous allons travailler se trouve à la page 97.

1.2.1 Définitions

(i) *Un foncteur* $F : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{C}'$ *entre deux catégories* $\mathfrak{C}$ *et* $\mathfrak{C}'$ *est* ***fidèle*** *si pour tout objet* A, A' *de* $\mathfrak{C}$ *l'application*

$$F : \hom_{\mathfrak{C}}(A, A') \longrightarrow \hom_{\mathfrak{C}'}\big(F(A), F(A')\big)$$

est injective (il est donc admis d'avoir $A \neq B$ *mais* $F(A) = F(B)$*).*

(ii) *Une* ***catégorie concrète*** *sur une catégorie* $\mathfrak{C}'$ *est une paire* $(\mathfrak{C}, F)$*, où* $\mathfrak{C}$ *est une catégorie et* $F : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{C}'$ *un foncteur fidèle.*

1.2.2 Remarque Soit $(\mathfrak{C}, F)$ une catégorie concrète sur une catégorie $\mathfrak{C}'$. Par abus de langage, nous disons aussi que $\mathfrak{C}$ est une catégorie concrète sur $\mathfrak{C}'$. Si $m : A \longrightarrow B$ est un morphisme de $\mathfrak{C}$ et $n : F(B) \longrightarrow C$ un morphisme de $\mathfrak{C}'$, nous notons $n : B \longrightarrow C$ le morphisme n de $\mathfrak{C}'$ et $n \circ m : A \longrightarrow C$ le morphisme $n \circ F(m) : F(A) \longrightarrow C$ de $\mathfrak{C}'$.

1.2.3 Définition *Une catégorie* $\mathfrak{C}$ *est une* ***sous-catégorie*** *d'une catégorie* $\mathfrak{C}'$ *si nous avons les propriétés suivantes :*

(a) *tous les objets de* $\mathfrak{C}$ *sont des objets de* $\mathfrak{C}'$*,*

(b) *pour des objets* A *et* B *de* $\mathfrak{C}$*,* $\hom_{\mathfrak{C}}(A, B) \subseteq \hom_{\mathfrak{C}'}(A, B)$*,*

(c) *pour tout objet* A *de* $\mathfrak{C}$*, l'identité sur* A *dans* $\mathfrak{C}$ *est l'identité sur* A *dans* $\mathfrak{C}'$*,*

(d) *la loi de composition dans* $\mathfrak{C}$ *est la restriction de la loi de composition dans* $\mathfrak{C}'$*.*

1.2.4 Remarque Si $\mathfrak{C}$ est une sous-catégorie d'une catégorie $\mathfrak{C}'$, alors $\mathfrak{C}$ est une catégorie concrète sur $\mathfrak{C}'$ (il suffit de considérer comme foncteur fidèle l'injection canonique). Par contre si $\mathfrak{C}$ est une catégorie concrète sur une catégorie $\mathfrak{C}'$, la catégorie $\mathfrak{C}$ n'est en générale pas une sous-catégorie de $\mathfrak{C}'$. Par exemple, la catégorie $\mathfrak{T}$ des espaces topologiques est une catégorie concrète sur la catégorie $\mathfrak{S}$ des ensembles mais n'est pas une sous-catégorie de $\mathfrak{S}$: un objet de $\mathfrak{T}$ est une paire $(X, \mathcal{T})$ où X est un ensemble et $\mathcal{T}$ une topologie sur X ; $(X, \mathcal{T})$ n'est donc pas un objet de $\mathfrak{S}$ bien que souvent, par abus de notations, nous notions X l'espace topologique $(X, \mathcal{T})$.

1.2.5 Définition *Soit* $(f_i : X_i \longrightarrow Y)_{i\in\{1,2\}}$, $(p_i : X \longrightarrow X_i)_{i\in\{1,2\}}$ *des familles de morphismes d'une catégorie* $\mathfrak{C}$*. La famille* $(p_i)_{i\in\{1,2\}}$ *est un* ***pullback*** *dans* $\mathfrak{C}$ *de* $(f_i)_{i\in\{1,2\}}$ *si elle a les propriétés suivantes :*

(a) $f_1 p_1 = f_2 p_2$,

(b) *pour toute famille de morphismes* $(q_i : Z \longrightarrow X_i)_{i\in\{1,2\}}$ *de* $\mathfrak{C}$ *avec* $f_1q_1 = f_2q_2$, *il existe un unique morphisme* $\alpha : Z \longrightarrow X$ *de* $\mathfrak{C}$ *tel que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "q_1"'] \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dr, "q_2"] & \\ X_1 \arrow[dr, "f_1"'] & X \arrow[l, "p_1"'] \arrow[r, "p_2"] & X_2 \arrow[dl, "f_2"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

Dans ce cas, nous appelons p_1 *et* p_2 *des projections.*

1.2.6 Définitions *Soit* $f : X \longrightarrow Y$ *un morphisme d'une catégorie* $\mathfrak{C}$.

(i) f *est un* ***épimorphisme*** *de* $\mathfrak{C}$ *si pour tout morphisme* $g_1, g_2 : Y \longrightarrow Z$ *de* $\mathfrak{C}$, $g_1f = g_2f$ *implique* $g_1 = g_2$.

(ii) *Si* $\mathfrak{C}$ *est une catégorie concrète sur une catégorie* $\mathfrak{C}'$, *alors* f *est un* ***$\mathfrak{C}'$-épimorphisme*** *si pour tout morphisme* $g_1, g_2 : Y \longrightarrow Z$ *de* $\mathfrak{C}'$, $g_1f = g_2f$ *implique* $g_1 = g_2$.

1.2.7 Définition *Une famille de morphismes* $(m_i : X_i \longrightarrow X)_{i\in\{1,2\}}$ *d'une catégorie* $\mathfrak{C}$ *est un* ***coproduit*** *de* $\mathfrak{C}$ *si pour toute famille de morphismes* $(n_i : X_i \longrightarrow Z)_{i\in\{1,2\}}$ *de* $\mathfrak{C}$, *il existe un unique morphisme* $\alpha : X \longrightarrow Z$ *de* $\mathfrak{C}$ *tel que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "m_1"] \arrow[dr, "n_1"'] & X \arrow[d, "\alpha"] & X_2 \arrow[l, "m_2"'] \arrow[dl, "n_2"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

Dans ce cas, nous appelons m_1 *et* m_2 *des injections.*

1.2.8 Remarque Dans la définition 1.2.7, s'il existe $k \in \{1, 2\}$ tel que n_k soit un épimorphisme de $\mathfrak{C}$, alors α est un épimorphisme de $\mathfrak{C}$. En effet, si nous avons des morphismes $f_1, f_2 : Z \longrightarrow Y$ de $\mathfrak{C}$ avec $f_1\alpha = f_2\alpha$, alors $f_1n_k = f_1\alpha m_k = f_2\alpha m_k = f_2n_k$. Comme n_k est un épimorphisme de $\mathfrak{C}$, nous avons $f_1 = f_2$.

1.2.9 Lemme *Soit* X_1, X_2 *des objets d'une catégorie* $\mathfrak{C}$ *et* $(m_i : X_i \longrightarrow X)_{i\in\{1,2\}}$ *un coproduit de* $\mathfrak{C}$. *Si* $f, g : X \longrightarrow Z$ *sont des morphismes de* $\mathfrak{C}$ *avec* $fm_i = gm_i$, $i = 1, 2$, *alors* $f = g$.

Preuve Par définition d'un coproduit, il existe un unique morphisme $\alpha : X \longrightarrow Z$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "m_1"] \arrow[dr, "fm_1"'] & X \arrow[d, "\alpha"] & X_2 \arrow[l, "m_2"'] \arrow[dl, "gm_2"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

$\alpha = f$ et $\alpha = g$ font l'affaire et comme α est unique nous devons avoir $f = g$. $\square$

1.2.10 Proposition *Soit X_1, X_2 des objets d'une catégorie $\mathfrak{C}$. S'il existe un coproduit de $\mathfrak{C}$, alors celui-ci est unique à un isomorphisme près et nous le notons $X_1 \amalg X_2$.*

Preuve Soit $(m_i : X_i \longrightarrow X)_{i\in\{1,2\}}$, $(m'_i : X_i \longrightarrow X')_{i\in\{1,2\}}$ des coproduits. Il existe alors des morphismes $\alpha : X \longrightarrow X'$ et $\alpha' : X' \longrightarrow X$ tels que $\alpha m_i = m'_i$ et $\alpha' m'_i = m_i$ pour $i = 1, 2$. Nous avons donc $(\alpha'\alpha)m_i = \alpha' m'_i = m_i$ pour $i = 1, 2$. Donc par le lemme 1.2.9, $\alpha'\alpha = \mathrm{Id}_X$. De la même manière, nous pouvons montrer que $\alpha\alpha' = \mathrm{Id}_{X'}$. Donc α est un isomorphisme. $\square$

Chapitre 2

Relations et germes de relation

Nous allons commencer ce chapitre par l'étude des relations définies sur un ensemble ou sur un espace topologique. Nous nous intéresserons plus particulièrement à la relation d'équivalence induite par une relation. Les relations analytiques et les relations très faiblement analytiques sur un espace complexe seront traitées plus en détails. Le cas d'une relation analytique sur un ouvert de $\mathbb{C}$ sera analysé séparément.

Nous nous intéresserons ensuite au germe d'une relation en un point et à son itération. Nous donnerons une définition et des conditions pour la stationnarité de la suite formée par de ces itérés.

2.1 Relations

2.1.1 Définition *Une **relation** sur un ensemble X est un sous-ensemble R de $X \times X$ avec les propriétés suivantes :*

(a) *pour tout $x \in X$, $(x, x) \in R$,*

(b) *pour tout $x, y \in X$, $(x, y) \in R$ implique $(y, x) \in R$.*

2.1.2 Notation et remarque Pour un sous-ensemble R de $X \times X$, nous notons $p_R, q_R : R \longrightarrow X$ les projections canoniques sur la première et sur la deuxième composante. Si X et un espace topologique, par définition de la topologie induite, p_R et q_R sont continues.

2.1.3 Définitions *Soit R une relation sur un ensemble X.*

(i) *Soit $U \subset X$. Nous définissons $R(U) := p_R q_R^{-1}(U) = q_R p_R^{-1}(U)$. Si $U = \{x\} \subset X$, nous écrirons simplement $R(x)$ au lieu de $R(\{x\})$.*

(ii) *Soit $Y \subset X$. La **restriction de R sur Y** est $R|_Y := R \cap (Y \times Y)$.*

2.1.4 Définitions et énoncés simples *Soit R, S des relations sur un ensemble X.*

(i) *La **composition de R et S** est la relation*

$$R \circ S := \Big\{(x,z) \in X \times X : \exists\, y \in X \text{ avec } \big((x,y),(y,z)\big) \in (R \times S) \cup (S \times R)\Big\}.$$

Nous avons alors $R \cup S \subset R \circ S$ et $R \circ S(U) = R\big(S(U)\big) \cup S\big(R(U)\big)$ pour tout $U \subset X$.

(ii) *Pour $n \in \mathbb{N}$, nous définissons par induction les relations R^n :*

$R^0 := \Delta_X,$

$R^{n+1} := R \circ R^n.$

Nous avons alors $R^n \subset R^{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $R^{n+1}(U) = R\big(R^n(U)\big)$ pour tout $U \subset X$.

(iii) *$R^\infty := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R^n$ est la plus petite relation d'équivalence contenant R. Nous noterons le quotient de X par cette relation d'équivalence $X/R := X/R^\infty$. Nous avons $R^\infty(U) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R^n(U)$.*

2.1.5 Remarque Soit R une relation sur un ensemble X et $n \in \mathbb{N}$. Pour un point $x \in X$ les énoncés suivants sont équivalents :

(i) $R^n(x) = R^{n+1}(x)$,

(ii) $R^m(x) = R^n(x)$ pour tout $m \geqslant n$,

(iii) $R^\infty(x) = R^n(x)$.

De plus, si pour $x \in X$, $\operatorname{Card} R^\infty(x) = N$, alors $R^\infty(x) = R^N(x)$.

2.1.6 Lemme *Soit R une relation sur un ensemble X. S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que* $\operatorname{Card} R^\infty(x) \leqslant n_0$ *pour tout $x \in X$, alors $R^\infty = R^n = R^{n_0}$ pour tout $n \geqslant n_0$.*

Preuve C'est une conséquence de la remarque 2.1.5. □

2.1.7 Lemme *([Egg80, 2.7]) Si $R = \overline{R}$ est une relation sur un espace topologique X séquentiel*[1] *séparé alors pour tout compact K, $R(K)$ est fermé.*

Preuve Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $R(K)$ convergeant vers $x \in X$. Nous allons montrer que $x \in R(K)$. Il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans K avec $(x_n, y_n) \in R$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Sans restriction de la généralité, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $y \in K$ et $\big((x_n, y_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $(x,y) \in R$. Ce qui signifie que $x \in R(K)$. □

2.1.8 Lemme *([Egg80, 2.8]) Soit $R = \overline{R} = R^\infty$ une relation d'équivalence ouverte sur un espace topologique X séquentiel séparé localement connexe, K un compact R-saturé et U un voisinage relativement compact de K. Si V est la réunion de toutes les composantes connexes de $R(U) \smallsetminus R(\partial U)$ intersectant K, alors V est un voisinage ouvert de K inclu dans U. De plus $\partial V \subset R(\partial U)$.*

[1]Un espace topologique X est séquentiel si nous avons la propriété suivante pour tout $A \subset X$: A est fermé si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans A qui converge nous avons $\lim_{n\to\infty} x_n \in A$. Un espace topologique qui satisfait le premier axiome de dénombrabilité est séquentiel.

Preuve V contient K car $K \cap \partial U = \emptyset$. Par le lemme 2.1.7, $R(\partial U)$ est fermé et comme $R(U)$ est ouvert V l'est aussi. Nous devons encore montrer que V est inclu dans U. Soit V_0 une composante connexe non vide de V. Par définition de V, V_0 n'intersecte pas ∂U et donc $V_0 \setminus \overline{U} = V_0 \setminus U =: V_1$. D'autre part, $V_2 := V_0 \cap U$ est non vide car $V_0 \cap K \neq \emptyset$ et K est contenu dans U. Les ensembles V_1 et V_2 sont ouverts disjoints et $V_1 \cup V_2 = V_0$. Nous devons avoir $V_0 = V_2 = V_0 \cap U$ car V_0 est connexe. Chaque composante connexe de V, et par conséquent tout V, est donc inclue dans U.
Il reste à montrer $\partial V \subset R(\partial U)$. Soit $x \in \partial V \subset \overline{U}$. Supposons $x \notin R(\partial U)$, donc $x \in U \setminus R(\partial U)$. Posons $V' := C_x\big(U \setminus R(\partial U)\big) \mathrel{\mathring{\subset}} X$. Nous avons $V \cap V' = \emptyset$ car $x \notin V$: une contradiction avec $x \in \partial V$. □

2.1.9 Lemme *Soit $R = R^\infty$ une relation d'équivalence sur un espace topologique X, $x \in X$ et $U \mathrel{\mathring{\subset}} X$ un voisinage de x. Si $R(x)$ possède un système fondamental de voisinages R-saturés, alors $R|_{\overline{U}}(x)$ possède un système fondamental de voisinages $R|_{\overline{U}}$-saturés.*

Preuve Soit $\widetilde{V} \mathrel{\mathring{\subset}} \overline{U}$ un voisinage ouvert de $A := R|_{\overline{U}}(x) = R(x) \cap \overline{U}$. Par définition de la topologie induite, il existe $V \mathrel{\mathring{\subset}} X$ tel que $V \cap \overline{U} = \widetilde{V}$. L'ensemble $W := V \cup (X \setminus \overline{U}) \mathrel{\mathring{\subset}} X$ est un voisinage de $R(x)$ et il existe un voisinage $W' \subset W$ de $R(x)$ qui est R-saturé. $W' \cap \overline{U} \subset \widetilde{V}$ est donc un voisinage de A qui est $R|_{\overline{U}}$-saturé. □

2.1.10 Définition *Une relation R sur un espace topologique X est* ***ouverte****,* ***discrète****,* ***propre****,* ***quasi-finie****, respectivement* ***finie*** *si la projection canonique p_R (et par symétrie la projection canonique q_R) est ouverte, discrète, propre, quasi-finie, respectivement finie.*

2.1.11 Théorème *Soit R une relation sur un espace topologique X.*

(i) *R est ouverte si et seulement si pour tout ouvert U de X, $R(U)$ est ouvert.*

(ii) *R est discrète si et seulement si pour tout $x \in X$, $R(x)$ est discret.*

(iii) *R est quasi-finie si et seulement si pour tout $x \in X$, $R(x)$ est fini.*

(iv) *Si X est séparé, alors R est propre si et seulement si pour tout compact K de X, $R(K)$ est compact.*

Preuve Ad (i)**.** "$\Rightarrow$" Soit $U \mathrel{\mathring{\subset}} X$. La projection p_R étant continue, nous avons $p_R^{-1}(U) \mathrel{\mathring{\subset}} R$. Comme R est ouverte, nous avons $R(U) = p_R q_R^{-1}(U) \mathrel{\mathring{\subset}} X$.
"$\Leftarrow$" Soit $W \mathrel{\mathring{\subset}} R$, $(x_1, x_2) \in W$ et $W_1 \times W_2 \mathrel{\mathring{\subset}} X \times X$ un voisinage de (x_1, x_2) avec $(W_1 \times W_2) \cap R \subset W$. Alors $R(W_1) \cap W_2 \subset q_R(W)$ est un voisinage ouvert de x_2 car $R(W_1) \mathrel{\mathring{\subset}} X$.

Ad (ii)**,** (iii)**.** Soit $x \in X$. Comme $p_R^{-1}(x) = \{x\} \times R(x)$ est homéomorphe à $R(x)$, $p_R^{-1}(x)$ est un ensemble discret, respectivement fini, si et seulement si $R(x)$ est discret, respectivement fini.

Ad (iv)**.** “$\Rightarrow$” Soit $K \subset X$ un ensemble compact. $p_R^{-1}(K)$ est compact car R est propre et $R(K) = p_R q_R^{-1}(K)$ est compact car p_R est continue et X est séparé.
“$\Leftarrow$” Soit $K \subset X$ un ensemble compact. $p_R^{-1}(K)$ est un sous-ensemble fermé du compact $K \times R(K)$ car K est fermé et p_R continue. $p_R^{-1}(K)$ est donc compact. $\square$

2.1.12 Théorème *Soit R et S des relations sur un espace topologique séparé X.*

(i) *Si R et S sont ouvertes, alors $R \circ S$ et R^n sont ouvertes pour tout $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.*

(ii) *Si R et S sont propres, alors $R \circ S$ et R^n sont propres pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

(iii) *Si R et S sont finies, alors $R \circ S$ et R^n sont finies pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

(iv) *Si R et S sont quasi-finies, alors $R \circ S$ et R^n sont quasi-finies pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Preuve Ces énoncés découlent directement des énoncés simples donnés en 2.1.4 et du théorème 2.1.11. $\square$

2.1.13 Lemme *Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application entre deux espaces topologiques séparés. Si X et Y satisfont le premier axiome de dénombrabilité, alors f est ouverte en un point $x \in X$ si et seulement si pour toute suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $f(x)$ il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers x telle que $f(x_n) = y_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ suffisamment grand.*

Preuve “$\Rightarrow$” Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans Y convergeant vers $f(x)$ et soit $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un système fondamental de voisinages de x. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $n_k \in \mathbb{N}$ tel que $y_n \in f(U_k)$ pour tout $n \geqslant n_k$. Sans restriction de la généralité, la suite $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante. Posons $x_n = x$ pour $n = 0, \ldots, n_0 - 1$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $n_{k+1} > n \geqslant n_k$, il existe $x_n \in U_k$ avec $f(x_n) = y_n$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a alors la propriété désirée.
“$\Leftarrow$” Supposons qu'il existe $U \Subset X$ tel que $f(U)$ ne soit pas un voisinage de $f(x)$. Il existe alors une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $Y \setminus f(U)$ qui converge vers $f(x)$ et il n'existe pas de suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers x avec $y_n = f(x_n)$ pour tout n suffisamment grand. $\square$

2.1.14 Corollaire *Soit X un espace topologique séparé satisfaisant le premier axiome de dénombrabilité et R une relation sur X. La relation R est ouverte si et seulement si pour tout $x \in X$, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers $x \in X$ et pour tout $x' \in R(x)$, il existe une suite $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers x' avec $x'_n \in R(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Preuve C'est une conséquence du lemme 2.1.13 car R est ouverte si et seulement si p_R est ouverte en tout point $(x, x') \in R$. $\square$

2.1.15 Théorème *([Egg80, 3.7]) Soit R une relation ouverte quasi-finie sur un espace topologique X localement compact satisfaisant le premier axiome de dénombrabilité. Une classe d'équivalence de R^∞ est soit discrète, soit ne contient aucun point isolé. De plus, si $R^\infty(x)$ est fermé pour un $x \in X$ (c'est le cas pour tout $x \in X$ si X/R est séparé), alors $R^\infty(x)$ est discret.*

Preuve † Soit $x \in X$. Supposons que $R^\infty(x)$ ne soit pas discret. Sans restriction de la généralité, nous pouvons admettre que x est un point d'accumulation de $R^\infty(x)$. Il existe donc une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers x avec $x_n \in R^\infty(x) \setminus \{x\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $x' \in R^\infty(x)$, $x' \neq x$. Nous allons voir que x' est aussi un point d'accumulation de $R^\infty(x)$. Il existe $m \in \mathbb{N}$ avec $x' \in R^m(x)$. Par le théorème 2.1.12, R^m est ouverte et par le corollaire 2.1.14 , il existe une suite $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers x' avec $x'_n \in R^m(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il reste à voir que $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans $R^\infty(x)$ convergeant vers x' qui n'est pas stationnaire $\big($donc x' est aussi un point d'accumulation de $R^\infty(x)\big)$. Supposons que cette suite soit stationnaire, c'est-à-dire il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ avec $x'_n = x'_{n_0}$ pour tout $n > n_0$. Donc pour tout $n > n_0$, nous avons $(x_n, x'_n) = (x_n, x'_{n_0}) \in R^m$. L'ensemble $R^m(x'_{n_0})$ est alors de cardinalité infinie car $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas stationnaire, ce qui est une contradiction car R^m est quasi-finie.
Soit $x \in X$ avec $R^\infty(x)$ fermé. Supposons que $R^\infty(x)$ n'ait pas de point isolé, c'est alors un ensemble parfait. Soit V un voisinage relativement compact de x. Donc, $\overline{V} \cap R^\infty(x)$ est un ensemble compact parfait et il est homéomorphe à l'ensemble de Cantor ([AH35, Satz VI', p.121]) : ceci est une contradiction car R étant quasi-finie les classes d'équivalences de R^∞ sont dénombrables. $R^\infty(x)$ ne peut donc qu'être discret. □

2.1.16 Proposition *Soit X un espace topologique localement compact et localement connexe satisfaisant le premier axiome de dénombrabilité, R une relation propre ouverte sur X et $a \in X$ avec $R^\infty(a)$ compact. Si X/R est séparé, alors $R^\infty(a)$ possède un système fondamental de voisinages R-saturés.*

Preuve Soit W un voisinage ouvert de $R^\infty(a)$. Sans restriction de la généralité, W est relativement compact ($R^\infty(a)$ étant compact et X localement compact, $R^\infty(a)$ peut être recouvert par un nombre fini d'ouverts relativement compacts). ∂W étant compact et X/R étant séparé, $\pi(\partial W)$ est compact et donc fermé (nous notons $\pi : X \longrightarrow X/R$ la projection canonique). Il s'en suit que $R^\infty(\partial W) = \pi^{-1}\pi(\partial W)$ est fermé. $\widetilde{V} := W \setminus R^\infty(\partial W)$ est un ensemble ouvert et nous notons $V \subset W$ l'union des composantes connexes de $\widetilde{V}$ intersectant $R^\infty(a)$ $\big($ l'ensemble $R^\infty(a)$ est inclu dans V car $R^\infty(a) \cap \partial W = \emptyset\big)$.
Nous allons voir que $\Omega := \big\{v \in V : R(v) \subset V\big\}$ est ouvert et fermé . Il s'en suivra que Ω est une réunion de composantes connexes de V, mais comme $R^\infty(a) \subset \Omega$ intersecte chaque composante connexe de V, nous avons $\Omega = V$. Comme Ω est R-saturé, V l'est aussi.
Ω est ouvert dans V. Soit $v \in V$. L'ensemble $p_R^{-1}(v) = \{v\} \times R(v)$ est inclu dans $q_R^{-1}(V)$ car $R(v) \subset V$. La projection p_R étant propre, il existe un ouvert U de X tel que $p_R^{-1}(v) \subset p_R^{-1}(U) \subset q_R^{-1}(V)$ (voir [KK83, 33 B.1]). U est donc un voisinage de v avec $R(U) = q_R p_R^{-1}(U) \subset V$. Par conséquent, U est inclu dans Ω.
Ω est fermé dans V. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans Ω qui converge vers $v \in V$. Soit $v' \in R(v)$. Nous devons montrer que $v' \in V$. La relation R étant ouverte, par le corollaire 2.1.14, il existe une suite $(v'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers v' avec $v'_n \in R(v_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme v_n est dans Ω, v'_n est dans V pour tout $n \in \mathbb{N}$ et v' est élément

de $\overline{V}$. Mais v' ne peut pas se trouver sur le bord de V car $\partial V \subset \partial\widetilde{V} \subset R^\infty(\partial W)$ (la première inclusion vient du fait que V est une réunion de composantes connexes de $\widetilde{V}$ et la deuxième du lemme 2.1.17) et $R^\infty(v) \cap \partial W = \emptyset$. □

2.1.17 Lemme *Soit X un espace topologique satisfaisant le premier axiome de dénombrabilité, W un ouvert de X et A un fermé de X. Si A contient le bord de W, alors A contient le bord de $W \smallsetminus A$.*

Preuve Soit $x \in \partial(W \smallsetminus A)$. Si x est élément de ∂W, alors $x \in A$. Sinon x est un point intérieur de W car $\partial(W \smallsetminus A) \subset W \cup \partial W$. Il existe donc $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système fondamental de voisinages de x inclus dans W. Le point x étant sur le bord de $W \smallsetminus A$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\emptyset \neq V_n \cap \big(X \smallsetminus (W \smallsetminus A)\big) = V_n \smallsetminus (W \smallsetminus A) = V_n \smallsetminus (V_n \smallsetminus A) = V_n \cap A.$$

Il existe donc une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans A qui converge vers x. Comme A est fermé, x se trouve dans A. □

2.2 Relations analytiques et relations très faiblement analytiques

2.2.1 Définitions *Une relation R sur un espace complexe X est* ***analytique*** *si R est un sous-ensemble analytique de $X \times X$. La relation R est* ***très faiblement analytique*** *si pour tout $(x, x') \in R$, il existe un ensemble $A \subset R$ localement analytique dans $X \times X$ qui contient (x, x') tel que les projections canoniques p_A et q_A soient ouvertes.*

2.2.2 Théorème (Holmann-Egger) *Soit Y un espace complexe, X un espace complexe localement irréductible et $f\colon Y \longrightarrow X$ une application holomorphe. Si un ensemble $R \subset Y$ a les propriétés suivantes :*

(a) $F := f|_R\colon R \longrightarrow X$ est surjective ouverte finie,

(b) pour tout $y \in R$, il existe un ensemble $A \subset R$ localement analytique dans Y contenant y tel que $f|_A\colon A \longrightarrow X$ soit ouverte,

alors R est un sous-ensemble analytique de Y.

Pour une preuve voir l'appendice.

Du théorème de Holmann-Egger, nous pouvons directement déduire l'énoncé suivant :

2.2.3 Corollaire *Une relation ouverte finie très faiblement analytique sur un espace complexe connexe localement irréductible est analytique.*

2.2.4 Définition *Soit R une relation quasi-finie sur un espace topologique X. Nous définissons la fonction*

$$\begin{array}{rccc} \nu_R : & X & \to & \mathbb{N} \\ & x & \mapsto & \operatorname{Card} R(x). \end{array}$$

*R est **bornée en $x \in X$**, s'il existe un voisinage $U \Subset X$ de x tel que $\nu_{(R|_U)}$ est bornée.*

Holmann a démontré le lemme suivant pour une relation d'équivalence ouverte finie faiblement analytique sur un espace complexe (voir [Hol78, 2.1]) :

2.2.5 Lemme *Soit R une relation ouverte quasi-finie et très faiblement analytique sur un espace complexe X. Nous avons les affirmations suivantes :*

(i) *ν_R est continue par en-bas, c'est-à-dire pour tout $x \in X$ il existe un voisinage $U \Subset X$ de x tel que $\nu_R(x) \leqslant \nu_R(y)$ pour tout $y \in U$.*

(ii) *$C_R := \{x \in X : \ \nu_R$ est continue en $x\}$ est ouvert et dense dans X.*

(iii) *$C_R \subset \{x \in X : \ R$ est bornée en $x\}$.*

Preuve La preuve présentée est celle écrite par Morel dans le cas où R est une relation d'équivalence faiblement analytique (voir [Mor01, 4.2.6]).

Ad (i)**.** Soit $x \in X$ avec $R(x) = \{x_1, \dots x_n\}$. Pour $i = 1, \dots, n$, il existe un ensemble localement analytique $A_i \subset R$ contenant (x, x_i) avec $p_R(A_i) \Subset X$. Sans restriction de la généralité, les A_i sont disjoints. Posons $U := \bigcap_{i=1}^n p_R(A_i)$. Pour tout $y \in U$, il existe $y_i \in X$ avec $(y, y_i) \in A_i, \ i = 1, \dots, n$ et $y_i \neq y_j$ pour $i \neq j$. Il s'en suit que $\{y_1, \dots, y_n\} \subset R(y)$ et donc $\nu_R(x) \leqslant \nu_R(y)$ pour tout $y \in U$.

Ad (ii)**.** Si ν_R est continue en $x \in X$, il existe un voisinage U de x tel que $\nu_R(x) = \nu_R(y)$ pour tout $y \in U$, donc ν_R est continue sur un voisinage de x.
Supposons que C_R ne soit pas dense dans X. Il existe alors $U \Subset X$ avec $U \cap C_R = \emptyset$ et ν_R est donc discontinue en tout point de U. Posons $A_n := \{x \in U : \nu_R(x) \leqslant n\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n est fermé : pour $x \in U \setminus A_n$, il existe un voisinage $V \Subset X$ de x tel que $n < \nu_R(x) \leqslant \nu_R(y)$ pour tout $y \in V$; $V \cap U$ est donc un voisinage de x dans $U \setminus A_n$. Comme R est quasi-finie, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = U$ et par le théorème de Baire, il existe n_0 tel que $\mathring{A}_{n_0} \neq \emptyset$. Nous choisissons n_0 minimal, c'est-à-dire tel que $\mathring{A}_{n_0 - 1} = \emptyset$. Soit $U' \Subset U$ avec $\emptyset \neq U' \subset A_{n_0}$. L'ensemble $U'' := U' \setminus A_{n_0-1}$ est ouvert car A_{n_0-1} est fermé et non-vide (sinon on aurait $U' \subset A_{n_0-1}$: une contradiction). Par construction, $\nu_R(x) = n_0$ pour tout $x \in U''$, donc ν_R est continue sur $U'' \subset U$: une contradiction.

Ad (iii)**.** Soit $x \in C_R$. Il existe une voisinage $U \Subset X$ de x tel que $\nu_R(x) = \nu_R(y)$ pour tout $y \in U$. Il s'en suit que $\nu_{(R|_U)}(y) \leqslant \nu_R(y) = \nu_R(x)$ pour tout $y \in U$. Donc $\nu_{(R|_U)}$ est bornée et R est bornée en x. □

2.2.6 Théorème *Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application holomorphe discrète entre deux espaces complexes. Pour tout $x \in X$, il existe des voisinages U de x, V de $f(x)$ tels que la cardinalité des fibres de $f|_U : U \longrightarrow V$ soit bornée.*

Preuve Soit $x \in X$. Considérons d'abord le cas où X est de dimension pure. Il existe un voisinage U de x et V de $f(x)$ tel que $f|_U : U \longrightarrow V$ soit finie ([KK83, 33 B.2]). Soit n la dimension de l'ensemble analytique $f(U) \subset V$ en $f(x)$. Nous pouvons trouver un voisinage $V' \subset V$ de $f(x)$ tel qu'il existe une application holomorphe ouverte finie surjective $g : f(U) \cap V' \longrightarrow W \Subset \mathbb{C}^n$ ([KK83, 48.8$_{\text{geo}}$]) et tel que $f(U) \cap V'$ soit connexe. g est donc un revêtement analytique ([GR84, 7§2.3]). Posons $U' := (f|_U)^{-1}(V')$. Nous allons voir que $f|_{U'} : U' \longrightarrow f(U) \cap V'$ est un revêtement analytique (ce qui implique que U' et V' sont les voisinages recherchés). Pour cela, il suffit de montrer que $g \circ f|_{U'}$ est un revêtement analytique ([GR84, 7§2.1]). $f|_{U'}$ est finie donc $g \circ f|_{U'}$ l'est aussi. Il suit donc de [GR65, V.C.5] que $\dim U' = \dim W$. Comme $g \circ f|_{U'}$ est discrète et W localement irréductible, il suit de [KK83, 49.16] que $g \circ f|_{U'}$ est ouverte, donc un revêtement analytique.
Si X n'est pas de dimension pure, il existe alors une décomposition $X = X_1 \cup \ldots \cup X_n$ telle que $X_1, \ldots, X_n$ soient de dimension pure. Nous pouvons supposer que les ensembles $X_1, \ldots, X_n$ contiennent chacun le point x sinon nous rapetissons X. Pour $i = 1, \ldots, n$, il existe des voisinages $U_i \Subset X_i$ de x et $V_i \Subset Y$ de $f(x)$ tels que la cardinalité des fibres de $f|_{U_i} : U_i \longrightarrow V_i$ soit bornée. Il s'en suit que $V := \bigcap_{i=1}^n V_i$ et $U := f^{-1}(V) \cap (\bigcup_{i=1}^n U_i) = \bigcup_{i=1}^n \big(f^{-1}(V) \cap U_i\big) = \bigcap_{i=1}^n (f|_{U_i})^{-1}(V)$ sont des voisinages avec les propriétés désirées. $\square$

2.2.7 Corollaire *Soit R une relation analytique discrète sur un espace complexe X. Si R^∞ est analytique, alors pour tout $x \in X$ il existe un voisinage U de x et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que la cardinalité de $R^\infty(y) \cap U$ soit inférieure à n_0 pour tout $y \in U$. Il s'en suit que R est bornée en x et $(R|_{U'})^\infty = (R|_{U'})^{n_0}$pour tout $U' \Subset U$.*

Preuve Soit $x \in X$. Pour $y \in X$ et un voisinage $V \Subset X$ de y relativement compact, $R^\infty(y) \cap V = \bigcup_{n \in N} \big(R^n(y) \cap V\big)$ est dénombrable ; R^∞ étant analytique, $R^\infty(y) \cap V$ est analytique et par conséquent discret. R^∞ est donc une relation d'équivalence discrète. Il existe donc par le théorème 2.2.6 un voisinage U de x et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que la cardinalité des fibres des projections canoniques $R^\infty|_U \to U$ soit plus petite que n_0.
Pour $U' \Subset U$ et $y \in U'$, nous avons $\operatorname{Card}(R|_{U'})^\infty(y) \leqslant \operatorname{Card} R^\infty(y) \cap U < n_0$ et donc du lemme 2.1.6, nous concluons que $(R|_{U'})^\infty = (R|_{U'})^{n_0}$. $\square$

2.2.8 Théorème *(*Kaup*) Si R est une relation analytique propre sur un espace complexe X, alors R^n est une relation analytique propre pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Pour une preuve, voir [Kau71, (1.1)c].

2.2.9 Théorème *([Egg80, 3.6]) Soit R une relation ouverte analytique sur un espace complexe X. S'il existe un point $a \in X$ avec $R(a) = \{a\}$ et si R^∞ est quasi-finie, alors les énoncés suivants sont équivalents :*

(i) *Il existe un voisinage U de a et un système fondamental de voisinages dans U de a qui sont $R|_U$-saturés.*

(ii) *Il existe un voisinage V de a tel que $R|_V$ soit propre.*
(iii) *Il existe un voisinage W de a tel que $(R|_W)^\infty$ soit analytique.*

Preuve †† "(i)⇒(ii)" Soit V un voisinage de a qui est $R|_U$-saturé et relativement compact dans U. Nous allons voir que $R|_V$ est propre. Soit $K \subset V$ un ensemble compact et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $R|_V(K)$. Sans restriction de la généralité, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point $x \in U$ car V est relativement compact dans U. D'autre part, il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans K tel que $(x_n, y_n) \in R|_V$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Sans restriction de la généralité, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point $y \in K$. La relation $R|_U$ étant analytique, $(x, y) \in R|_U$ et comme V est $R|_U$-saturé, nous avons $x \in V$ et donc $x \in R|_V(K)$.

"(ii)⇒(iii)" Par [Kau71, 2.3], $(R|_V)^\infty$ est analytique.

"(iii)⇒(i), (ii)" Par le corollaire 2.2.7, il existe un voisinage W' relativement compact dans W de a et $n_0 \in \mathbb{N}$ avec $\mathrm{Card}(R|_{W'})^\infty(x) \leqslant n_0$ pour tout $x \in W'$ et $(R|_{W''})^\infty = (R|_{W''})^{n_0}$ pour tout $W'' \subset W'$. Soit U la composante connexe de $W' \smallsetminus (R|_W)^\infty(\partial W')$ contenant le point a. Par le lemme 2.1.7, U est ouvert, et par le lemme 2.1.17, $\partial U \subset (R|_W)^\infty(\partial W')$.
Nous allons voir que $R|_U$ est propre. Soit K un sous-ensemble compact de U et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $R|_U(K)$. Sans restriction de la généralité, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x \in W$ car U est relativement compact dans W. Il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans K tel que $(x_n, y_n) \in R|_U$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Sans restriction de la généralité, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $y \in K$ et $\big((x_n, y_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors vers $(x, y) \in R|_W$ car $R|_W$ est analytique. x est dans U sinon nous aurions $x \in \partial U \subset (R|_W)^\infty(\partial W')$: une contradiction car $y \in K \subset U \subset W' \smallsetminus (R|_W)^\infty(\partial W')$. Par conséquent, $R|_U(K)$ est un sous-ensemble compact de U.
Comme $U \subset W'$, nous avons $(R|_U)^\infty = (R|_U)^{n_0}$. Il s'en suit que $(R|_U)^\infty$ est propre (théorème 2.1.12) et a possède un système fondamental de voisinage $R|_U$-saturés (voir [KK83, 33 B.4]). □

2.2.10 Corollaire *Soit R une relation ouverte analytique sur un espace complexe X à topologie dénombrable avec R^∞ quasi-finie et soit $a \in X$ avec $R(a) = \{a\}$. S'il existe un voisinage W de a satisfaisant une des équivalences du théorème 2.2.9, alors il existe un voisinage $U \Subset W$ de a et $n_0 \in \mathbb{N}$ avec les propriétés suivantes :*
(a) *a possède un système fondamental de voisinages $R|_U$-saturés,*
(b) *$R|_U$ est propre,*
(c) *$\mathrm{Card}(R|_U)^\infty(x) \leqslant n_0$ pour tout $x \in U$,*
(d) *$(R|_U)^\infty = (R|_U)^{n_0}$,*
(e) *$(R|_U)^\infty$ est analytique finie.*

Preuve Dans la preuve "(iii)⇒(i), (ii)" du théorème 2.2.9, nous avons vu qu nous pouvons trouver un voisinage U de a et $n_0 \in \mathbb{N}$ avec les propriétés (a), (b), (c), (d) et $(R|_U)^\infty$ propre. Comme $R|_U$ est propre et analytique, $(R|_U)^\infty = (R|_U)^{n_0}$ est aussi analytique (théorème 2.2.8). □

2.2.11 Théorème *([Egg80, 3.8]) Soit R une relation ouverte finie et analytique sur un espace complexe normal X. Les énoncés suivants sont équivalents :*

(i) *R^∞ est une relation d'équivalence analytique finie.*

(ii) *X/R est un espace complexe et la projection canonique $\pi : X \to X/R$ est finie.*

(iii) *X/R est séparé et pour chaque composante connexe X_0 de X, il existe un compact R-saturé qui a une intersection non vide avec X_0.*

Preuve "(i)⇒(ii)" Comme R^∞ est ouverte, il suit de [BR90] que X/R est un espace complexe.

"(ii)⇒(iii)" Pour chaque composante connexe X_0 de X, il suffit de choisir un point $a \in X_0$ pour que $\pi^{-1}\pi(a)$ soit un compact avec la propriété désirée.

"(iii)⇒(i)" Soit $p \in \mathbb{N}$. Nous définissons l'ensemble

$$\Omega_p := \{x \in X : \exists U \Subset X \text{ avec } x \in U \text{ et } R^p(x') = R^{p+1}(x') \ \forall x' \in U\}.$$

Ω_p est ouvert par définition. Nous allons voir que $X \setminus \Omega_p$ est ouvert. Soit $x_0 \in X \setminus \Omega_p$. Il existe $x_1 \in R^{p+1}(x_0) \setminus R^p(x_0)$. Comme R^n est analytique pour tout $n \in \mathbb{N}$ (théorème 2.2.8), il existe un voisinage $U \Subset X \times X$ de $(x_0, x_1) \in R^{p+1}$ tel que $U \cap R^p = \emptyset$. La relation R^{p+1} étant ouverte, $p_{R^{p+1}}(U \cap R^{p+1})$ est alors un voisinage de x_0 contenu dans $X \setminus \Omega_p$. Donc Ω_p est la réunion de plusieurs composantes connexes de X.
Nous allons voir que pour chaque composante connexe X_0 de X, il existe $p(X_0) \in \mathbb{N}$ avec $X_0 \subset \Omega_{p(X_0)}$ $\big($ce qui implique que $R^\infty \cap (X_0 \times X) = R^{p(X_0)} \cap (X_0 \times X)$ et donc que R^∞ est analytique$\big)$. Soit X_0 une composante connexe de X. Comme X/R est séparé, par le théorème 2.1.15, R^∞ est discrète. Il existe donc $a \in X_0$ avec $\operatorname{Card} R^\infty(a) < \infty$ (choisir un point $a \in K \cap X_0$, où K est le compact R-saturé intersectant X_0). Par la proposition 2.1.16, $R^\infty(a)$ possède un voisinage ouvert R-saturé U qui est relativement compact dans X. Donc $R^\infty|_U$ est quasi-finie (c'est une relation d'équivalence discrète sur un ensemble relativement compact) et par [Kau71, 2.2], $(R|_U)^\infty = R^\infty|_U$ est analytique et propre. La projection canonique sur la première composante $R^\infty|_U \to U$ est alors ouverte et finie, il s'en suit que c'est un revêtement analytique ([GR84, 7§2.3]) et $\operatorname{Card} R^\infty(x)$ est bornée sur U. Donc, par le lemme 2.1.6, il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ avec $R^{p_0}(x') = R^{p_0+1}(x')$ pour tout $x' \in U$. L'ensemble U est alors inclu dans Ω_{p_0} mais comme Ω_{p_0} est une réunion de composantes connexes de X, nous devons avoir $X_0 \subset \Omega_{p_0}$ et nous posons $p(X_0) := p_0$. □

2.2.12 Proposition (Holmann-Kaup-Reiffen) *Si R est une relation d'équivalence analytique sur un espace complexe normal connexe avec une topologie dénombrable dont les classes d'équivalences sont toutes de dimension pure d, alors il existe une application holomorphe ouverte $\pi : X \longrightarrow \widetilde{X}$ avec $\widetilde{X}$ un espace complexe normal et tel que $C_x\big(R^\pi(x)\big) = C_x\big(R(x)\big)$ pour tout $x \in X$.*

Preuve La preuve présentée est celle réalisée par Holmann, Kaup et Reiffen (voir [HKR02]).

Soit T une composante irréductible de R. Pour tout $(x,y) \in T$, nous avons $p_T^{-1}p_T\big((x,y)\big) \subset \{x\} \times R(x)$ et donc $\dim_{(x,y)} p_T^{-1}p_T\big((x,y)\big) \leqslant d$. Il existe un point $(x,y) \in T$ avec $T_{(x,y)} = R_{(x,y)}$ et pour un tel point nous avons $p_T^{-1}p_T\big((x,y)\big)_{(x,y)} = p_R^{-1}p_R\big((x,y)\big)_{(x,y)}$. Il suit alors de l'irréductibilité de T que $\dim_{(x,y)} p_T^{-1}p_T\big((x,y)\big) = d$ pour tout $(x,y) \in T$. Par [KK83, 48.3$_{\text{geo}}$-49.15], nous avons $\dim T \leqslant n+d$, $n := \dim X$, et par [KK83, 49.16], p_T est ouverte si et seulement si $\dim T = n+d$.
Posons $\widetilde{R} := \{(x,y) \in R : \dim_{(x,y)} R = n+d\}$. Comme $\dim_{(x,y)} R \leqslant n+d$ pour tout $(x,y) \in R$, $\widetilde{R}$ est la réunion des composantes irréductibles de R de dimension $n+d$. Donc $\widetilde{R}$ est un sous-ensemble analytique de R. Il suit de [KK83, 49.16], que $\widetilde{R}$ est l'ensemble des points $(x,y) \in R$ tel que p_R est ouverte en (x,y). Nous allons montrer que $\widetilde{R}$ est une relation d'équivalence. Il est clair que si $(a,b) \in \widetilde{R}$, alors $(b,a) \in \widetilde{R}$. Si T est la composante irréductible de R contenant Δ_X, alors p_T est surjective et par conséquent $\dim T = n+d$ et $\Delta \subset T \subset \widetilde{R}$: si $\dim T < n+d$, alors p_T est ouverte en aucun point et $p_T(T)$ a une mesure de Lebesgue nulle (lemme 2.2.13) donc $p_T(T) \neq X$, ce qui est une contradiction. Si p_R est ouverte en (a,b) et en (b,c), alors il suit du lemme 2.1.13 que p_R est aussi ouverte en (a,c). Nous avons donc construit une relation d'équivalence analytique ouverte $\widetilde{R} \subset R$ dont les fibres sont de dimension pure d.
Par [BR90], $X/\widetilde{R}$ est un espace complexe normal. Nous allons montrer que la projection canonique $\pi : X \longrightarrow X/\widetilde{R}$ a la propriété désirée, c'est-à-dire que $C_x\big(\widetilde{R}(x)\big) = C_x\big(R(x)\big)$ pour tout $x \in X$. L'inclusion "$\subset$" est vérifiée car $\widetilde{R} \subset R$. Supposons que l'inclusion "$\supset$" soit fausse. Il existe alors une composante irréductible A de $C_x\big(R(x)\big)$ avec $A \cap C_x\big(\widetilde{R}(x)\big) \neq \emptyset$ et $A \not\subset C_x\big(\widetilde{R}(x)\big)$. Soit $a \in A \setminus \operatorname{Sing}\big(R(x)\big)$. Comme $\widetilde{R} \subset R$, comme les classes d'équivalence de R et $\widetilde{R}$ sont de dimension pure d et comme $R(a)$ est une variété complexe dans un voisinage de a, nous avons $A_a = \big(R(a)\big)_a = \big(\widetilde{R}(a)\big)_a$. Il s'en suit que A est une composante irréductible de $\widetilde{R}(a)$. Comme $A \cap C_x\big(\widetilde{R}(x)\big) \neq \emptyset$, nous avons alors $C_x\big(\widetilde{R}(x)\big) = C_x\big(\widetilde{R}(a)\big) \supset A$: une contradiction. $\square$

2.2.13 Lemme *Soit $f : Z \longrightarrow X$ une application holomorphe, où Z est irréductible avec une topologie dénombrable et X un espace complexe normal connexe avec une topologie dénombrable. Si f est ouverte en aucun point $x \in X$, alors $f(Z)$ a une mesure de Lebesgue nulle.*

Preuve Par le théorème de Sard, l'affirmation est vérifiée si Z et X sont des variétés complexes. Si Z n'est pas un variété complexe, l'affirmation se démontre pas induction sur la dimension de Z : par le théorème de Sard $f(Z \setminus \operatorname{Sing} Z)$ est de mesure nulle et par hypothèse d'induction $f(\operatorname{Sing} Z)$ est de mesure nulle. Pour le cas général, si $f^{-1}(\operatorname{Sing} X) = Z$, l'affirmation est vérifiée car $f(Z) = \operatorname{Sing} X$. Sinon $f(Z) \subset f\big(X \setminus f^{-1}(\operatorname{Sing} X)\big) \cup \operatorname{Sing} X$ et cet ensemble est de mesure nulle. $\square$

2.3 Relations analytiques sur un ouvert de $\mathbb{C}$

2.3.1 Lemme *Soit R une relation analytique sur un ouvert connexe $X \Subset \mathbb{C}$. Si $R^2 \neq X \times X$, alors pour tout $a \in X$, il existe un voisinage $U \Subset X$ de a tel que $R|_U$ soit ouverte discrète et tel que $R|_U \subset U \times U$ soit de dimension pure 1.*

Preuve Supposons qu'il existe $x \in X$ tel que $R(x)$ ne soit pas discret. $R(x) = p_R q_R^{-1}(x) = p_R\big(R \cap \big(X \times \{x\}\big)\big)$ est alors un sous-ensemble analytique de X qui n'est pas discret. Comme X est connexe, il s'en suit que $R(x) = X$ et donc $R^2 = X \times X$: une contradiction.
Soit $a \in X$. Nous avons $\dim_{(a,a)} R = 1$ car $\Delta_X \subset R \subset R^2 \neq X \times X$. Par conséquent, il existe un voisinage $U \Subset X$ tel que $R|_U \subset U \times U$ soit de dimension pure 1. Il suit alors de [KK83, 49.16] que $p_{(R|_U)}$ est ouverte. $\square$

2.3.2 Lemme *Pour une fonction holomorphe $f(x) = a_p x^p + a_{p+1}x^{p+1} + \dots,\ p > 0,\ a_p \neq 0$ définie sur un voisinage $X \Subset \mathbb{C}$ de 0, il existe un biholomorphisme $h : U \longrightarrow h(U)$ défini sur un voisinage $U \Subset X$ de 0 tel que $f|_U = h^p$.*

Sans preuve.

2.3.3 Lemme *Soit X un espace complexe normal et $a \in X$. Si $\{g_{1,a}, \dots, g_{n,a}\}$ est un sous-groupe fini de $\mathrm{Aut}(X_a)$, alors il existe un voisinage $U \Subset X$ de a et des représentants $g_1, \dots, g_n \in \mathrm{Aut}(U)$ de $g_{1,a}, \dots, g_{n,a}$ tels que $\{g_1, \dots, g_n\}$ soit un sous-groupe fini de $\mathrm{Aut}(U)$.*

Preuve Soit $\widetilde{V} \Subset X$ un voisinage connexe de a sur lequel il existe des représentants biholomorphes g_ν de $g_{\nu,a}$ pour $\nu = 1, \dots, n$ et soit $V \Subset \widetilde{V}$ un voisinage connexe de a tel que $g_\nu(V) \subset \widetilde{V}$ pour $\nu = 1, \dots, n$. Posons $U := \bigcap_{\nu=1}^n g_\nu(V)$. Pour $\mu \in \{1, \dots, n\}$, nous avons

$$g_\mu(U) = \bigcap_{\nu=1}^{n} g_\mu \circ g_\nu(V) = \bigcap_{\lambda=1}^{n} g_\lambda(V) = U.$$

U a donc la propriété désirée. $\square$

2.3.4 Théorème *Si R est une relation analytique sur un voisinage $X \Subset \mathbb{C}$ de 0, nous n'avons que les deux alternatives suivantes :*

(I) *Pour tout voisinage $U \Subset X$ de 0, il existe $y \in U$ tel que $\mathrm{Card}(R|_U)^\infty(y) = \infty$.*

(II) *Il existe un voisinage $U \Subset X$ de 0 tel que $(R|_U)^\infty$ soit analytique.*

Preuve Si pour tout voisinage connexe U de 0 nous avons $(R|_U)^2 = U \times U$, c'est l'alternative (I) qui est vérifiée.
Sinon, par le lemme 2.3.1, nous pouvons choisir un voisinage U de 0 tel que $R|_U$ soit discrète ouverte et tel que $R|_U \subset U \times U$ soit de dimension pure 1. Nous pouvons choisir U connexe et supposer que $X = U$. Comme R est de dimension 1, l'ensemble

des singularités de R est discret. Donc, sans restriction de la généralité, nous pouvons supposer que $\operatorname{Sing} R \subset \{(0,0)\}$. Si X est suffisamment petit, nous pouvons trouver une normalisation $\nu\colon Z = \dot\bigcup_{j\in J} Z_j \longrightarrow R$, $J := \{1,\ldots,M\}$, de R qui remplit les conditions suivantes :

(a) $0 \in Z_j \Subset \mathbb{C}$ pour tout $j \in J$,

(b) $\nu^{-1}\big((0,0)\big) = \{0 \in Z_j : j \in J\}$.

La première condition peut être satisfaite car les composantes connexes de Z sont des espaces normaux de dimension 1 donc des variétés complexes (voir [KK83, 74.4]). Pour que la deuxième condition soit satisfaite, il faut choisir X suffisamment petit pour que les composantes irréductibles de R soient irréductibles en 0.
Nous définissons $\hat{p}_R := p_R\nu$ et $\hat{q}_R := q_R\nu$. L'image par ν d'un voisinage de $\nu^{-1}\big((0,0)\big)$ est un voisinage de $(0,0)$. Donc, par le lemme 2.3.2, nous pouvons supposer que X est suffisamment petit pour qu'il existe des applications biholomorphes $a_j\colon Z_j \longrightarrow a_j(Z_j) \Subset \mathbb{C}$, $b_j\colon Z_j \longrightarrow b_j(Z_j) \Subset \mathbb{C}$ et des nombres $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{N}^*$ tel que $\hat{p}_R|_{Z_j} = a_j^{\alpha_j}$ et $\hat{q}_R|_{Z_j} = b_j^{\beta_j}$. Nous obtenons alors le diagramme commutatif de la figure 2.1. Remarquons que les nombres α_j, β_j sont indépendants du choix de X et

$$\begin{tikzcd}
a_1(Z_1) \arrow[rrrr, bend left, "z\mapsto z^{\alpha_1}"] & & a_M(Z_M) \arrow[rr, "z\mapsto z^{\alpha_M}"] & & X \\
Z_1 \dot\cup \arrow[u, "a_1"'] \arrow[d, "b_1"] & \dots & \dot\cup Z_M \arrow[u, "a_M"'] \arrow[d, "b_M"] \arrow[r, "\nu"] & R \arrow[ur, "p_R"] \arrow[dr, "q_R"'] & \\
b_1(Z_1) \arrow[rrrr, bend right, "z\mapsto z^{\beta_1}"'] & & b_M(Z_M) \arrow[rr, "z\mapsto z^{\beta_M}"] & & X
\end{tikzcd}$$

FIG. 2.1: Diagramme commutatif induit par R

de ν.

Posons $h_j := b_j a_j^{-1}$ et pour tout $x \in X$, nous avons

$$R(x) = \bigcup_{j\in J} \Big\{ \big(h_j(z)\big)^{\beta_j} : z \in a_j(Z_j) \text{ avec } z^{\alpha_j} = x \Big\}. \tag{2.1}$$

Considérons d'abord le cas où il existe $j \in J$ tel que $\alpha_j < \beta_j$. Comme $h_j(0) = 0$, il existe une fonction $\widetilde{h}_j$ tel que $h_j(z) = z\widetilde{h}_j(z)$. Soit $V \Subset \mathbb{C}$ un voisinage de 0 relativement compact dans $a_j(Z_j)$. Nous avons pour tout $z \in V$

$$|h_j(z)| \leqslant |z| \underbrace{\max_{\xi\in\overline{V}} |\widetilde{h}_j(\xi)|}_{=:C_j}.$$

Pour $x \in X$ et $z \in V \subset a_j(Z_j)$ avec $z^{\alpha_j} = x$, $R(x)$ contient $\bigl(h_j(z)\bigr)^{\beta_j}$ et nous avons les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\left|\bigl(h_j(z)\bigr)^{\beta_j}\right| &\leqslant \bigl(C_j|z|\bigr)^{\beta_j}\\
&= C_j^{\beta_j}|x|^{\beta_j/\alpha_j}\\
&= \underbrace{C_j^{\beta_j}|x|^{\frac{\beta_j-\alpha_j}{\alpha_j}}}_{<1}|x|, \text{ pour } |x| \text{ suffisament petit,}\\
&< |x|.
\end{aligned}$$

Donc pour x suffisamment proche de 0, nous pouvons construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $x_{n+1} \in R(x_n)$, $|x_{n+1}| < |x_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x_1 \in R(x)$. Il s'en suit que $\operatorname{Card} R^\infty(x) = \infty$. Pour tout voisinage U de 0, il existe donc $y \in U$ avec $\operatorname{Card}(R|_U)^\infty(y) = \infty$. C'est donc l'alternative (I) qui est satisfaite. Nous obtenons le même résultat s'il existe $j' \in J$ avec $\alpha_{j'} > \beta_{j'}$ en travaillant avec h_j^{-1}.

Si $\alpha_j = \beta_j = 1$ pour tout $j \in J$ (c'est le cas si et seulement si R est le graphe d'applications biholomorphes dans un voisinage de $(0,0)$), pour $x \in X' := \bigcap_{j\in J} a_j(Z_j)$, l'équation 2.1 devient

$$R(x) = \bigl\{h_j(x) : j \in J\bigr\}. \tag{2.2}$$

Notons Γ le groupe engendré par le germes $h_{1,0}, \ldots, h_{M,0}$. Si Γ est fini, par le lemme 2.3.3, il existe un voisinage $U \Subset X'$ de 0 tel que $h_1(U) = \ldots = h_M(U)$ et tel que $h_1|U, \ldots, h_n|_U$ engendre un sous-groupe fini $\Gamma(U)$ des automorphismes de U. Nous avons alors $(R|_U)^\infty(x) = \bigl\{h(x) : h \in \Gamma(U)\bigr\}$. Il s'en suit que $(R|_U)^\infty$ est analytique. Nous allons voir que si Γ est infini, alors nous nous trouvons dans le cas (I). Soit $U \Subset X'$. Par contraposition de [Kau78, Satz 1], il existe un représentant $h : V \longrightarrow h(V)$ d'un élément de Γ avec les propriétés suivantes :

(a) $V \Subset X' \cap U$ est connexe,

(b) il existe $j_1, \ldots, j_n \in J$ avec $h = h_{j_n} \circ \ldots \circ h_{j_1}|_V$ et tels que $h_{j_l} \circ \ldots \circ h_{j_1}(V) \subset X'$ pour $l = 1, ..., n-1$,

(c) il existe un point $x \in V$ dont la h-orbite[2] dans V est infinie.

Il suit de l'équation 2.2 que toute la h-orbite de x dans V est inclue dans $(R|_V)^\infty(x) \subset (R|_U)^\infty(x)$. Nous nous trouvons donc dans le cas (I).

Il nous reste à traiter le cas où $\alpha_j = \beta_j$ pour tout $j \in J$ et $d := \alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_M > 1$. Pour tout $x \in X$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $z^d = x$, l'équation 2.1 devient

$$R(x) = \Bigl\{\bigl(h_j(\zeta_{jk} z^{d_j})\bigr)^{\alpha_j} : j \in J, k = 0, \ldots, \alpha_j - 1,\ \zeta_{jk} z^{d_j} \in a_j(Z_j)\Bigr\}, \tag{2.3}$$

où $d_j := d/\alpha_j$ et $\zeta_{jk} := e^{k\frac{2\pi i}{\alpha_j}}$. Notons $D_r \Subset \mathbb{C}$ le disque ouvert centré en 0 de rayon r. Il existe $0 < r_0 < 1$ tel que $D_{r_0} \subset \bigcap_{j\in J} a_j(Z_j)$. Pour tout $x \in D_{s_0}$, $s_0 := r_0^d$, et

[2]Pour une application $f : X \longrightarrow Y$ avec $X \cap Y \neq \emptyset$, la f-orbite dans X d'un point $a \in X$ est $\{x \in X : \exists p \in \mathbb{N} \text{ tel que } f^\nu(a) \in X \text{ pour } 0 \leqslant \nu \leqslant p \text{ et } f^p(a) = x\}$.

pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $z^d = x$ nous avons $|z^{d_j}| \leqslant |z| = |x|^{1/d} < s_0^{1/d} = r_0$; il s'en suit que $\zeta_{jk} z^{d_j} \in D_{r_0} \subset a_j(Z_j)$ pour tout $j \in J$ et pour $k = 0, \dots \alpha_j - 1$. Donc pour tout $x \in D_{s_0}$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $z^d = x$ l'équation 2.3 devient

$$R(x) = \left\{ \left(h_j(\zeta_{jk} z^{d_j}) \right)^{\alpha_j} : j \in J, k = 0, \dots, \alpha_j - 1 \right\}. \tag{2.4}$$

Comme $h_j(0) = 0$ et $h_j'(0) \neq 0$ pour tout $j \in J$, par le lemme 2.3.2, pour $j \in J, k = 0, \dots, \alpha_j - 1$, il existe $0 < r_{jk} < r_0$ et un biholomorphisme $h_{jk} : D_{r_{jk}} \longrightarrow h_{jk}(D_{r_{jk}})$ tel que

$$h_j \left(\zeta_{jk} z^{d_j} \right) = \left(h_{jk}(z) \right)^{d_j}.$$

Posons $r_1 := \min\{ r_{jk} : j \in J,\ k = 0, \dots, \alpha_j - 1 \}$ et $s_1 := r_1^d$. Pour tout $x \in D_{s_1}$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $z^d = x$, nous avons $\zeta_{jk} z^{d_j} \in D_{r_1}$ pour $j \in J, k = 0, \dots, \alpha_j - 1$ et l'équation 2.4 devient

$$R(x) = R(z^d) = \left\{ \left(h_{jk}(z) \right)^d : j \in J, k = 0, \dots, \alpha_j - 1 \right\}. \tag{2.5}$$

Notons $\phi_\zeta : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ la rotation d'angle ζ autour de l'origine et Γ le groupe engendré par l'ensemble de germes d'automorphismes

$$\{ h_{jk,0} : j \in J, k = 0, \dots, \alpha_j - 1 \} \cup \{ \phi_{\zeta,0} : \zeta^d = 1 \}.$$

Supposons que Γ soit fini. Γ est alors un groupe abélien (voir [Kau78, Satz 1]). Donc pour un germe $h = \Sigma_{n>0} c_n z^n \in \Gamma$ ($c_1 \neq 0$ car h est un germe de biholomorphisme) et pour tout $\zeta \in \mathbb{C}$ avec $\zeta^d = 1$, nous avons $h \circ \phi_{\zeta,0} = \phi_{\zeta,0} \circ h$ et

$$\sum_{n>0} c_n (\zeta z)^n = \zeta \sum_{n>0} c_n z^n.$$

Nous devons donc avoir $c_n \zeta^{n-1} = c_n$ pour tout $n > 0$ et pour tout $\zeta \in \mathbb{C}$ avec $\zeta^d = 1$. Comme $d \neq 1$, c_n est non nul uniquement pour $n - 1 \in d \cdot \mathbb{N}$, c'est-à-dire pour $n \in d \cdot \mathbb{N} + 1$. Nous avons donc

$$\begin{aligned} h &= c_1 z + c_{d+1} z^{d+1} + c_{2d+1} z^{2d+1} + \dots \\ &= z(c_1 + c_{d+1} z^d + c_{2d+1} z^{2d} + \dots). \end{aligned}$$

Il existe donc pour tout $j \in J$ et pour tout $k = 0, \dots, \alpha_{j-1}$ des applications holomorphes $\widetilde{h}_{jk} : D_{s_1} \longrightarrow \widetilde{h}_{jk}(D_{s_1})$ avec $\widetilde{h}_{jk}(0) \neq 0$ et telles que pour tout $z \in D_{r_1}$ nous avons $h_{jk}(z) = z \widetilde{h}_{jk}(z^d)$ (nous supposons que s_1 est suffisamment petit). Pour tout $x \in D_{s_1}$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $z^d = x$, l'équation 2.5 devient alors

$$\begin{aligned} R(x) &= \left\{ \left(z \cdot \widetilde{h}_{jk}(z^d) \right)^d : j \in J,\ k = 0, \dots, \alpha_j - 1 \right\} \\ &= \left\{ x \cdot \left(\widetilde{h}_{jk}(x) \right)^d j \in J,\ k = 0, \dots, \alpha_j - 1 \right\}. \end{aligned}$$

Dans un voisinage de $(0, 0)$, R est donc le graphe d'applications biholomorphes : une contradiction. Γ est donc infini et nous pouvons montrer comme précédemment que nous nous trouvons dans le cas (I). $\square$

2.3.5 Remarque En examinant la preuve du théorème 2.3.4, nous constatons que le seul cas où une relation R définie sur un voisinage de $0 \in \mathbb{C}$ satisfait l'alternative (II) est celui où pour x suffisamment proche de 0 nous avons $R(x) = \{h_j(x) : j \in J\}$, avec $\{h_j : j \in J\}$ un ensemble fini d'automorphismes définis sur un voisinage de 0 induisant un groupe fini.

2.4 Germes de relation

Dans cette section, tous les espaces topologiques qui seront rencontrés satisferont le premier axiome de dénombrabilité.

2.4.1 Définitions

(i) *Un **germe de relation** (R, a) sur un germe d'espace topologique X_a est le germe d'une relation $R \subset X \times X$ au point $(a, a) \in X \times X$, où X est un représentant de X_a. Dans ce cas, R est un représentant de (R, a) sur X.*

(ii) *Un germe de relation (R, a) sur X_a est **ouvert, discret**, respectivement **analytique** s'il existe un représentant R de (R, a) sur un représentant X de X_a qui est ouvert, discret, respectivement analytique.*

(iii) *Pour un germe de relation (R, a) sur X_a, un représentant R de (R, a) sur X est **admissible** si nous avons la condition suivante :*

pour tout voisinage $U \Subset X$ de a et pour toute relation S_1, S_2 sur U avec $(S_1, a) = (S_2, a)$, nous avons $(R|_U \circ S_1, a) = (R|_U \circ S_2, a)$.

(iv) *Soit $(R, a), (S, a)$ des germes de relation sur X_a avec des représentants R, S sur X (ces représentants ne sont pas nécessairement admissibles). Nous définissons alors l'**union** de ces deux germes de la manière suivante :*

$$(R, a) \cup (S, a) := (R \cup S, a).$$

2.4.2 Remarque *Si R est un représentant admissible sur X d'un germe de relation (R, a), alors pour tout voisinage $U \Subset X$ de a, $R|_U$ est un représentant admissible de (R, a).*

2.4.3 Proposition *Soit R une relation sur un espace topologique X avec $(X \times \{a\})_{(a,a)} \not\subset R_{(a,a)}$ pour un point $a \in X$. Si R est un représentant admissible de (R, a), alors $R(a) = \{a\}$.*

Preuve Supposons qu'il existe un point $b \in R(a) \setminus \{a\}$. Il existe par hypothèse sur R une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $X \setminus R(a)$ convergeant vers a. Posons $Q := \Delta_X$ et $Q' := Q \cup \big\{(b, a_n) : n \in \mathbb{N}\big\} \cup \big\{(a_n, b) : n \in \mathbb{N}\big\}$. Nous avons $(Q, a) = (Q', a)$ mais $(R \circ Q, a) \neq (R \circ Q', a)$ car $\big((a, a_n)\big)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite dans $R \circ Q' \setminus R \circ Q$ convergeant vers (a, a). Donc R n'est pas un représentant admissible. $\square$

2.4.4 Proposition *Soit $(R, a), (S, a)$ des germes de relation avec des représentants R_i, respectivement S_i, sur X_i, $i = 1, 2$. Si $\big(R_1$ ou $S_1\big)$ et $\big(R_2$ ou $S_2\big)$ sont admissibles alors*

$$(R_1 \circ S_1, a) = (R_2 \circ S_2, a).$$

Preuve Il existe un voisinage $X \Subset X_1 \cap X_2$ de a tel que $R_1|_X = R_2|_X =: R$ et $S_1|_X = S_2|_X =: S$.
Traitons d'abord le cas où R_1 et R_2 sont admissibles. Définissons la relation $\widetilde{S}_i := S_i|_X \cup \Delta_{X_i}$ sur X_i, $i = 1, 2$. Nous avons alors

$$(R_i \circ S_i, a) = (R_i \circ \widetilde{S}_i, a) = \big((R_i \circ \widetilde{S}_i)|_X, a\big) = (R_i|_X \circ \widetilde{S}_i|_X, a) = (R \circ S, a)$$

pour $i = 1, 2$ $\big($la première égalité est vérifiée car R_i est un représentant admissible et la troisième car $(R_i \circ \widetilde{S}_i)|_X = R_i|_X \circ \widetilde{S}_i|_X\big)$.
Dans le cas où R_1 et S_2 sont admissibles, nous posons $\widetilde{R}_1 := R_1|_X \cup \Delta_{X_1}$ et $\widetilde{S}_2 := S_2|_X \cup \Delta_{X_2}$. Nous avons alors les égalités suivantes :

$$(R_1 \circ S_1, a) = (R_1 \circ \widetilde{S}_1, a) = \big((R_1 \circ \widetilde{S}_1)|_X, a\big) = (R_1|_X \circ \widetilde{S}_1|_X, a) = (R \circ S, a),$$

$$(R_2 \circ S_2, a) = (\widetilde{R}_2 \circ S_2, a) = \big((\widetilde{R}_2 \circ S_2)|_X, a\big) = (\widetilde{R}_2|_X \circ S_2|_X, a) = (R \circ S, a).$$

□

Grâce à la proposition précédente, nous pouvons définir la composition de germes de relation qui possèdent des représentants admissibles :

2.4.5 Définitions *Soit $(R, a), (S, a)$ des germes de relation sur un germe d'espace topologique X_a avec des représentants R, S sur X. Si R ou S est un représentant admissible, alors nous définissons*

$$(R, a) \circ (S, a) := (R \circ S, a).$$

Si R est un représentant admissible de (R, a), nous définissons pour $n \in \mathbb{N}$

$$(R, a)^n := \begin{cases} (R, a) \circ (R, a)^{n-1} & \text{si } n \geqslant 1, \\ (\Delta_X, a) & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

Par la proposition 2.4.4, ces définitions sont indépendantes du choix des représentants.

2.4.6 Proposition *([Egg80, 4.2]) Si (R, a) est un germe de relation avec un représentant admissible R, alors*

$$(R, a)^n = (R^n, a)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Preuve Nous démontrons cette égalité par induction sur n. L'ancrage $n = 0$ est trivial. D'autre part, nous avons $(R, a)^n = (R, a) \circ (R, a)^{n-1} = (R, a) \circ (R^{n-1}, a) = (R^n, a)$ (la dernière égalité est vérifiée car R est un représentant admissible). □

2.4.7 Théorème *([Egg80, 4.3]) Soit (R, a) un germe de relation sur un germe d'espace topologique X_a. Si (R, a) possède un représentant R sur X tel que R soit un sous-ensemble fermé de $X \times X$ et $R(a) = \{a\}$, alors pour tout voisinage $U \subset X$ relativement compact de a, $R|_U$ est un représentant admissible de (R, a).*

Preuve †† Soit $V \Subset U$ un voisinage de a et S_1, S_2 des représentants sur V d'un germe de relation (S, a). Supposons que $(R|_V \circ S_1, a) \neq (R|_V \circ S_2, a)$. Il existe donc une suite $\big((x_n, z_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers (a, a) avec, sans restriction de la généralité, $(x_n, z_n) \in (R|_V \circ S_1) \smallsetminus (R|_V \circ S_2)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Sans restriction de la généralité, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $y_n \in V \Subset U$ avec $(x_n, y_n) \in R|_V$ et $(y_n, z_n) \in S_1 \smallsetminus S_2$. Comme U est relativement compact dans X, nous pouvons supposer que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $y \in X$. Comme R est fermé, nous avons $(a, y) \in R$ donc $y = a$ car $R(a) = \{a\}$. Nous avons trouvé une suite $\big((y_n, z_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $S_1 \smallsetminus S_2$ qui converge vers (a, a) ce qui signifie que $(S_1, a) \neq (S_2, a)$: une contradiction. □

2.4.8 Corollaire *Si (R, a) est un germe de relation analytique discret sur un germe d'espace complexe X_a, alors (R, a) possède un représentant admissible.*

Preuve C'est un cas particulier du théorème 2.4.7. Plus précisément, si R est un représentant analytique discret sur un représentant X de X_a, alors il existe un voisinage $U \Subset X$ de a tel que $R|_U(a) = \{a\}$ et tel que $R|_U$ soit un représentant admissible de (R, a). □

2.4.9 Théorème *([Egg80, 4.4]) Si (R, a) et (Q, a) sont des germes de relation analytiques discrets sur un germe d'espace complexe X_a, alors $(R, a) \circ (Q, a)$ est aussi un germe de relation analytique discret.*

Preuve Soit R', Q' des représentants admissibles analytiques discrets de (R, a), respectivement (Q, a), sur un représentant X' de X_a. Soit $X \Subset X'$ un voisinage relativement compact de a. Posons $R := R'|_X$ et $Q := Q'|_X$. Soit $\Omega := \Big\{\big((x, y), (y', z)\big) \in (R \times Q) \cup (Q \times R) : y = y'\Big\}$. Notons $p : \Omega \longrightarrow X \times X$ la projection $\big((x, y), (y, z)\big) \mapsto (x, z)$. Comme p est discrète, il existe des voisinages $U \Subset \Omega$ de $\big((a, a), (a, a)\big)$ et $V \Subset X \times X$ de (a, a) tels que $p|_U : U \longrightarrow V$ soit finie (voir [KK83, 33 B.2]). Il s'en suit que $p(U)$ est analytique dans V. Nous allons voir que $\big(p(U)\big)_{(a,a)} = (R \circ Q)_{(a,a)}$. Un calcul direct montre que $p(\Omega) = R \circ Q$ et par conséquent $\big(p(U)\big)_{(a,a)} \subset (R \circ Q)_{(a,a)}$. Supposons que l'autre inclusion ne soit pas vérifiée. Il existe alors une suite $\big((x_n, z_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $R \circ Q \smallsetminus p(U)$ qui converge vers (a, a). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous pouvons trouver, sans restriction de la généralité, un $y_n \in X$ tel que $(x_n, y_n) \in R$, $(y_n, z_n) \in Q$ mais $\big((x_n, y_n), (y_n, z_n)\big) \notin U$. Comme X est relativement compact, nous pouvons supposer, sans restriction de la généralité, que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point $y \in X'$. La suite $\big((x_n, y_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers $(a, y) \in R$ car R est analytique. Mais comme R est admissible $R(a) = \{a\}$ et nous avons $y = a$. Il s'en suit qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > N$, $\big((x_n, y_n), (y_n, z_n)\big) \in U$: une contradiction. □

2.4.10 Remarque et définition Pour une relation R sur un ensemble X, nous avons $R^\infty := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R^n$. Nous ne pouvons cependant pas directement étendre cette définition aux germes de relation car une union infinie de germes n'est en général pas définie (les représentants du germe d'ensemble sur lequel les germes de relation sont définis peuvent devenir de plus en plus petits). D'autre part, pour un germe (R,a), le germe (R^∞,a) dépend du choix du représentant admissible (voir l'exemple 2.4.11). Nous étendrons donc cette définition de la manière suivante :

Soit (R,a) un germe de relation sur X_a. Si (R,a) possède un représentant admissible, $\boldsymbol{(R,a)^\infty}$ désigne la suite

$$(R,a) \subset (R,a)^2 \subset \ldots \subset (R,a)^n \subset \ldots$$

2.4.11 Exemple Soit $P := \big\{(x,y) \in \mathbb{C}\times\mathbb{C} : x^3 = y \text{ ou } x = y^3\big\} \cup \Delta_{\mathbb{C}}$, $Q := \big\{(x,y) \in \mathbb{C}\times\mathbb{C} : x^2y = 1 \text{ ou } xy^2 = 1\big\} \cup \Delta_{\mathbb{C}}$ et $R := P \cup Q$ des relations analytiques discrètes sur $\mathbb{C}$. Notons $B_\epsilon \subset \mathbb{C}$ la boule ouverte centrée en 0 de rayon $\epsilon > 0$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in B_{\epsilon(n)}$, $\epsilon(n) := (1/4)^{3^n}$, et pour tout $n' \leqslant n$, nous avons $P^{n'}(x) \subset B_{1/4}$ et par conséquent $Q|_{B_2}\big(P^{n'}(x)\big) = P^{n'}(x)$. Il s'en suit que

$$(R|_{B_1})^n|_{B_{\epsilon(n)}} = (P|_{B_1})^n|_{B_{\epsilon(n)}} = (P|_{B_2})^n|_{B_{\epsilon(n)}} = (R|_{B_2})^n|_{B_{\epsilon(n)}}$$

(la première égalité est vérifiée car $R|_{B_1} = P|_{B_1}$, la deuxième par calcul direct et la troisième car $Q|_{B_2}\big(P^{n'}(x)\big) = P^{n'}(x)$ pour tout $x \in B_{\epsilon(n)}$ et pour tout $n' \leqslant n$).
Cependant $\big((R|_{B_1})^\infty, 0\big) \neq \big((R|_{B_2})^\infty, 0\big)$. D'une part, nous avons

$$\big((R|_{B_1})^\infty, 0\big) = \big((P|_{B_1})^\infty, 0\big) = \big((P^\infty)|_{B_1}, 0\big) = (P^\infty, 0)$$

$\big($la première égalité étant vérifiée car $R|_{B_1} = P|_{B_1}$ et la deuxième car $(P|_{B_1})^\infty = (P^\infty)|_{B_1}\big)$. D'autre part, nous avons $\big(\frac{4}{5}, (\frac{4}{5})^4\big) \in (R|_{B_2})^2 \smallsetminus P^\infty$. Par conséquent $\big((\frac{4}{5})^{3^n}, (\frac{4}{5})^{4\cdot 3^n}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans $(R|_{B_2})^\infty \smallsetminus P^\infty$ convergeant vers $(0,0)$ et donc $\big((R|_{B_2})^\infty, 0\big) \neq (P^\infty, 0) = \big((R|_{B_1})^\infty, 0\big)$.

2.4.12 Théorème *(d'après [Egg80, 4.6]) Soit (R,a) un germe de relation analytique discret ouvert sur un germe d'espace complexe X_a. Les énoncés suivants sont équivalents :*

(i) *Il existe un représentant analytique discret R de (R,a) sur un représentant X de X_a tel que R^∞ soit analytique.*

(ii) *La suite $(R,a)^\infty$ est stationnaire, c'est-à-dire il existe un nombre $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $(R,a)^n = (R,a)^{n_0}$ pour tout $n > n_0$.*

(iii) *Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et un représentant admissible analytique fini ouvert R de (R,a) sur un représentant X de X_a tel que $\operatorname{Card} R^\infty(x) \leqslant n_0$ pour tout $x \in X$ $\big($par conséquent, $R^\infty = R^{n_0}$ est analytique finie et $(R^\infty, a) = (R,a)^{n_0}\big)$.*

2.4.13 Remarque Si un germe de relation (R,a) possède un représentant admissible nous avons l'équivalence suivante : il existe un nombre $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $(R,a)^n = (R,a)^{n_0}$ pour tout $n \geqslant n_0$ si et seulement si il existe un nombre $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $(R,a)^{n_0+1} = (R,a)^{n_0}$.

Preuve du théorème 2.4.12 "(i)$\Rightarrow$ (ii)" Par le corollaire 2.2.7, il existe un voisinage U de a et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que $(R|_{U'})^\infty = (R|_{U'})^{n_0}$ pour tout $U' \subset U$ et tel que $R|_U(a) = \{a\}$. Soit U' relativement compact dans U. Par le théorème 2.4.7, $R|_{U'}$ est un représentant admissible de (R, a). Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0$, il suit du théorème 2.4.6 que nous avons les égalités suivantes : $(R, a)^n = (R|_{U'}, a)^n = \big((R|_{U'})^n, a\big) = \big((R|_{U'})^{n_0}, a\big) = (R|_{U'}, a)^{n_0} = (R, a)^{n_0}$.

"(ii)$\Rightarrow$(iii)" Soit R un représentant admissible analytique discret ouvert sur un représentant X de X_a. Comme R est admissible, par la proposition 2.4.6, nous avons $(R^{n_0}, a) = (R, a)^{n_0} = (R, a)^{n_0+1} = (R^{n_0+1}, a)$. Il s'en suit qu'il existe un voisinage relativement compact $U \Subset X$ de a tel que $R^{n_0}|_U$ soit analytique et $R^{n_0}|_U = R^{n_0+1}|_U$. Nous allons d'abord voir que a possède un système fondamental de voisinages $R|_U$-saturés (remarquons que U étant relativement compact dans X, $R|_U$ est quasi-finie). Soit $V \subset U$ un voisinage de a. Il faut trouver un voisinage $W \subset V$ de a qui est $R|_U$-saturé. Nous pouvons donc supposer, sans restriction de la généralité, que V est relativement compact dans U. Par le lemme 2.1.7, $R(\partial U)$ est fermé dans X et $R^{n_0}|_U(\partial V)$ est fermé dans U $\big(a$ ne se trouve dans aucun de ces ensembles car R étant admissible, nous devons, par la proposition 2.4.3, avoir $R(a) = \{a\}\big)$. Sans restriction de la généralité, $V \cap R(\partial U) = \emptyset$. Posons $W := C_a\big(V \smallsetminus R^{n_0}|_U(\partial V)\big) \Subset V$. Soit $b \in W$. Nous allons voir que $R|_U(b) \subset W$ (ce qui implique que W est $R|_U$-saturé, donc un voisinage de a avec la propriété désirée). Soit $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow W$ un chemin reliant a et b (W étant un espace complexe connexe, W est connexe par arc, voir [GR84, 9§3.2]). Posons $\Omega := \{t \in [0,1] : R|_U\big(\gamma(t)\big) \subset W\}$. L'ensemble Ω est non-vide et contient le point a. Il reste à montrer que Ω est ouvert et fermé.

Ω est ouvert. Soit $t_0 \in \Omega$. Supposons qu'il n'existe pas de voisinage de t_0 inclu dans Ω. Il existe alors une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers t_0 avec $R|_U\big(\gamma(t_n)\big) \not\subset W$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous choisissons un $x_n \in R|_U\big(\gamma(t_n)\big) \smallsetminus W$. Sans restriction de la généralité, U étant relativement compact, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point $x \in \overline{U}$. Comme R est analytique, nous avons $\big(x, \gamma(t_0)\big) \in R$ et $x \in W$ car $t_0 \in \Omega$. Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in W$ pour tout $n > n_0$: une contradiction.

Ω est fermé. Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans Ω convergeant vers un point t_0. Il faut vérifier que $t_0 \in \Omega$. Supposons le contraire, c'est-à-dire $R|_U\big(\gamma(t_0)\big) \not\subset W$. Soit $y \in R|_U\big(\gamma(t_0)\big) \smallsetminus W$ et posons $x := \gamma(t_0) \in W$. Le point y ne peut se trouver sur le bord de W sinon nous aurions la contradiction suivante :

$$\begin{aligned} x \in W \cap R|_U(\partial W) &\subset W \cap R|_U(R^{n_0}|_U(\partial V)) \\ &\subset W \cap R^{n_0+1}|_U(\partial V) \\ &= W \cap R^{n_0}|_U(\partial V) = \emptyset \end{aligned}$$

$\big($la première inclusion est vérifiée car, par le lemme 2.1.17, $\partial W \subset R^{n_0}|_U(\partial V)\big)$. Soit $W_0 \subset U \smallsetminus \overline{W}$ un voisinage de y. La relation $R|_U$ étant ouverte, $R|_U(W_0)$ est un voisinage de x. Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n > n_0$, $\gamma(t_n) \in R|_U(W_0)$. Donc pour tout $n > n_0$, $R|_U\big(\gamma(t_n)\big) \not\subset W$: une contradiction. Ω est donc fermé et il s'en suit que W est $R|_U$-saturé.

Comme $(R, a)^{n_0} = (R, a)^{n_0+1}$, il existe un voisinage $U' \Subset U$ de a qui est $R|_U$-saturé et tel que $(R|_U)^{n_0}|_{U'} = (R|_U)^{n_0+1}|_{U'}$. Nous avons alors $(R|_{U'})^{n_0} = (R|_{U'})^{n_0+1}$ et nous avons donc trouvé un voisinage U' de a tel $R|_{U'}(a) = \{a\}$ (car R est un représentant admissible de (R, a), voir la proposition 2.4.3), $(R|_{U'})^\infty$ est quasi-finie $\big($car U' étant relativement compact dans X et R, $R|_{U'}$ est quasi-finie et donc $(R|_{U'})^\infty(R|_{U'})^{n_0}$ l'est aussi$\big)$ et a possède un système fondamental de voisinages $R|_{U'}$-saturés. Il suit donc du corollaire 2.2.10 que nous pouvons trouver un voisinage $U'' \Subset U'$ de a tel que $R|_{U''}$ possède les propriétés désirées (par la remarque 2.4.2, $R|_{U''}$ est admissible).

"(iii)⇒(i)" Trivial. $\square$

Chapitre 3

Monts et massifs

Dans ce chapitre, nous allons définir un mont et un massif dans une catégorie $\mathfrak{C}$. Si $\mathfrak{C}$ est une catégorie concrète sur une catégorie $\mathfrak{C}''$, nous allons donner une condition pour qu'un massif dans $\mathfrak{C}$ possède un mont $\mathfrak{C}''$-équivalent. Ceci facilitera grandement les preuves des théorèmes d'existence de pushout pour un massif connexe dans $\mathfrak{K}^{\mathrm{fos}}$ et $\mathfrak{K}_{\mathrm{g}}^{\mathrm{do}}$ que nous verrons à la fin de ce chapitre.

3.1 Quelques définitions

3.1.1 Définitions

(i) *Un **mont** dans une catégorie* $\mathfrak{C}$ *est une famille finie*[1] *de morphismes de* $\mathfrak{C}$ $(u_j : X \longrightarrow Y_j)_{j\in J}$, *avec* $\mathrm{Card}\, J > 1$. *L'objet* X *est le sommet du mont, les* u_j *ses arêtes et les* Y_j *ses vallées. Si nous désirons préciser le nombre de vallées, nous parlons de* N*-mont, où* $N := \mathrm{Card}\, J$.

(ii) *Soit* $(X_i)_{i\in I}$ *et* $(Y_j)_{j\in J}$ *deux familles finies d'objets d'une catégorie* $\mathfrak{C}$. *Un **massif** de sommets* $(X_i)_{i\in I}$ *et de vallées* $(Y_j)_{j\in J}$ *est une famille de monts* $\Big((u_j^i : X_i \longrightarrow Y_j)_{j\in J_i}\Big)_{i\in I}$ *de* $\mathfrak{C}$ *avec* $\mathrm{Card}\, J_i \geqslant 2$, $J_i \subset J$ *pour tout* $i \in I$ *et* $\bigcup_{i\in I} J_i = J$. *Les* u_j^i *sont les arêtes du massif.*

3.1.2 Notation Afin d'alléger la notation d'un massif $\Big((u_j^i : X_i \longrightarrow Y_j)_{j\in J_i}\Big)_{i\in I}$ de sommets $(X_i)_{i\in I}$ et de vallées $(Y_j)_{j\in J}$, souvent nous noterons M_i le mont $(u_j^i : X_i \longrightarrow Y_j)_{j\in J_i}$ et $(M_i)_{i\in I}$ le massif.

3.1.3 Remarque Un mont étant un cas particulier de massif, toutes les opérations que nous allons faire sur un massif sont définies sur un mont.

[1] Une application f d'un ensemble I dans un ensemble E est appelée famille d'éléments de E indexée par I. La famille est alors notée $(x_i)_{i\in I}$ et $x_i \in E$ désigne l'image par f de i.

3.1.4 Définition *Soit $\mathbb{M}^{(k)} = (M_i)_{i\in I^{(k)}}$ un massif de sommets $(X_i)_{i\in I^{(k)}}$ et de vallées $(Y_j)_{j\in J^{(k)}}$ pour $k = 1, 2$. L'**union** de $\mathbb{M}_1$ et de $\mathbb{M}_2$ est le massif*

$$\mathbb{M}_1 \cup \mathbb{M}_2 := (M_i)_{i\in I}$$

de sommets $(X_i)_{i\in I}$ et de vallées $(Y_j)_{j\in J}$ avec $I := I^{(1)} \dot\cup I^{(2)}$ et $J := J^{(1)} \cup J^{(2)}$.

3.1.5 Définition *Soit $\mathbb{M} = (M_i)_{i\in I}$ et $\mathbb{M}'$ des massifs. $\mathbb{M}'$ est **inclu** dans $\mathbb{M}$ s'il existe $I' \subset I$ tel que $\mathbb{M}' = (M_i)_{i\in I'}$ et le **complément** de $\mathbb{M}'$ dans $\mathbb{M}$ est le massif*

$$\mathbb{M} \smallsetminus \mathbb{M}' := (M_i)_{i\in I\smallsetminus I'}.$$

3.1.6 Définitions *Soit $\mathfrak{C}$ une catégorie concrète sur une catégorie $\mathfrak{C}''$ et $\mathbb{M} = \Big((u^i_j : X_i \longrightarrow Y_j)_{j\in J_i}\Big)_{i\in I}$ un massif dans $\mathfrak{C}$. Rappelons que $J = \bigcup\limits_{i\in I} J_i$.*

(i) *Une famille $(l_j : Y_j \longrightarrow L)_{j\in J}$ de morphismes de $\mathfrak{C}''$ est une **liaison** pour $\mathbb{M}$ dans $\mathfrak{C}''$ si $l_j u^i_j = l_{j'} u^i_{j'}$ pour tout $i \in I$ et pour tout $j, j' \in J_i$.*

(ii) *Une liaison $(p_j : Y_j \longrightarrow P)_{j\in J}$ pour $\mathbb{M}$ dans $\mathfrak{C}''$ est un **pushout dans $\mathfrak{C}''$** si pour toute liaison $(l_j : Y_j \longrightarrow L)_{j\in J}$ de $\mathbb{M}$ dans $\mathfrak{C}''$, il existe un unique morphisme $f : P \longrightarrow L$ de $\mathfrak{C}''$ tel que $fp_j = l_j$ pour tout $j \in J$.*

3.1.7 Exemple Nous allons voir que selon la catégorie dans laquelle nous faisons le pushout, celui-ci peut différer. Posons $A := \{z \in \mathbb{C} : |\Re z| > |\Im z|\}$. Sur $\mathbb{C}$, nous prenons deux relations d'équivalence R et S définies de la manière suivante pour $z \in \mathbb{C}$:

$$R(z) := \{z, -z\}, \qquad S(z) := \begin{cases} \{z, -z\} & \text{si } z \in A, \\ \{z\} & \text{si } z \notin A. \end{cases}$$

Considérons le mont M suivant :

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "i"'] \arrow[dr, "p"] & \\ \mathbb{C} & & A/(R|_A) \end{tikzcd}$$

où i est l'inclusion canonique et p la projection canonique. $\mathbb{C}/S$ est le pushout pour M dans $\mathfrak{S}$ mais ce n'est pas un espace complexe car il n'est pas séparé : pour $x \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$, il n'est pas possible de séparer $x + ix$ de $-(x + ix)$. Le pushout pour M dans $\mathfrak{K}$ est $\mathbb{C}/R$ car R est la plus petite relation d'équivalence analytique contenant S.

3.1.8 Définition *Deux massifs $\mathbb{M}^{(1)}$ et $\mathbb{M}^{(2)}$ dans une catégorie $\mathfrak{C}$ concrète sur $\mathfrak{C}''$ ayant les mêmes vallées sont **$\mathfrak{C}''$-équivalents** si toute liaison pour $\mathbb{M}^{(1)}$ dans $\mathfrak{C}''$ est une liaison pour $\mathbb{M}^{(2)}$ dans $\mathfrak{C}''$ et inversement.*

3.1.9 Proposition *Soit $\mathbb{M}^{(1)}, \mathbb{M}^{(2)}$ et $\mathbb{M}$ des massifs dans une catégorie $\mathfrak{C}$ concrète sur $\mathfrak{C}''$. Si $\mathbb{M}^{(1)}$ est inclu dans $\mathbb{M}$ et est $\mathfrak{C}''$-équivalent à $\mathbb{M}^{(2)}$, nous pouvons alors remplacer $\mathbb{M}^{(1)}$ par $\mathbb{M}^{(2)}$ dans $\mathbb{M}$, plus précisément $\mathbb{M}$ est $\mathfrak{C}''$-équivalent à $(\mathbb{M} \smallsetminus \mathbb{M}^{(1)}) \cup \mathbb{M}^{(2)}$.*

Preuve Soit $(Y_j)_{j\in J}$ les vallées de $\mathbb{M}$, $(Y_j)_{j\in J'}$ celles de $\mathbb{M}^{(1)}$ (et donc aussi de $\mathbb{M}^{(2)}$). Soit $(l_j : Y_j \longrightarrow L)_{j\in J}$ une liaison pour $\mathbb{M}$ dans $\mathfrak{C}''$. La famille de morphismes $(l_j)_{j\in J'}$ est une liaison pour $\mathbb{M}^{(1)}$ et donc aussi pour $\mathbb{M}^{(2)}$ car ces deux massifs sont équivalents. Il s'en suit que $(l_j)_{j\in J}$ est une liaison pour $(\mathbb{M} \smallsetminus \mathbb{M}^{(1)}) \cup \mathbb{M}^{(2)}$.
De manière analogue, on montre que si $(l_j : Y_j \longrightarrow L)_{j\in J}$ est une liaison pour $(\mathbb{M} \smallsetminus \mathbb{M}^{(1)}) \cup \mathbb{M}^{(2)}$ dans $\mathfrak{C}''$, alors c'est aussi une liaison pour $\mathbb{M}$. □

Un massif $\mathbb{M} := \Big((u^i_j : X_i \longrightarrow Y_j)_{j\in J_i}\Big)_{i\in I}$ de sommets $(X_i)_{i\in I}$ et de vallées $(Y_j)_{j\in J}$ définit un graphe $\Gamma_{\mathbb{M}}$ dont les sommets sont les éléments de J. Deux sommets $j, j' \in J$ de $\Gamma_{\mathbb{M}}$ sont reliés par une arête s'il existe $i \in I$ avec $j, j' \in J_i$.

3.1.10 Définitions *Un massif $\mathbb{M}$ est **connexe** si le graphe $\Gamma_{\mathbb{M}}$ est connexe.*

3.2 Equivalence monts-massifs

L'objectif de cette section est de montrer que tout massif connexe dans $\mathfrak{K}^{\mathrm{fos}}$, respectivement $\mathfrak{K}^{\mathrm{do}}_{\mathrm{g}}$, est $\mathfrak{S}$-, respectivement $\mathfrak{T}_{\mathrm{g}}$-, équivalent à un mont dans $\mathfrak{K}^{\mathrm{fos}}$, respectivement $\mathfrak{K}^{\mathrm{do}}_{\mathrm{g}}$. Comme dans les deux cas la construction d'un mont équivalent est similaire, nous avons fait appel à la théorie des catégories afin de dégager les caractéristiques essentielles à cette construction (voir la propriété $(\star)$ au point 3.2.1). Ceci nous a permis de faire un énoncé général sur l'équivalence entre monts et massifs (voir le théorème 3.2.2). Les propositions 3.2.10 et 3.2.13 nous montrent que les caractéristiques que nous avons extraites sont adaptées aux problèmes que nous voulons résoudre.

3.2.1 Convention Nous dirons qu'un triplet de catégories $(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}', \mathfrak{C}'')$ a la propriété $(\star)$ s'il a les propriétés suivantes :

($\star$a) $\mathfrak{C}$ est une sous-catégorie de $\mathfrak{C}'$;

($\star$b) $\mathfrak{C}'$ est une catégorie concrète sur $\mathfrak{C}''$;

($\star$c) tous les morphismes de $\mathfrak{C}$ sont des $\mathfrak{C}''$-épimorphismes ;

($\star$d) si $(f_i : X_i \longrightarrow Y)_{i\in\{1,2\}}$ est une famille de morphismes de $\mathfrak{C}'$, alors il existe un pullback $(p_i : P \longrightarrow X_i)_{i\in\{1,2\}}$ de $(f_i)_{i\in\{1,2\}}$ dans $\mathfrak{C}'$ et si de plus les f_i sont des morphismes de $\mathfrak{C}$, alors il en est de même pour les p_i ;

($\star$e) si X_1, X_2 sont des objets de $\mathfrak{C}'$, alors il existe un coproduit $(m_i : X_i \longrightarrow X_1 \amalg X_2)_{i\in\{1,2\}}$, dans $\mathfrak{C}'$ et $(m_i)_{i\in\{1,2\}}$ est aussi un coproduit dans $\mathfrak{C}''$. De plus pour toute famille $(n_i : X_i \longrightarrow Y)_{i\in\{1,2\}}$ de morphismes de $\mathfrak{C}$, l'unique morphisme $\alpha : X_1 \amalg X_2 \longrightarrow Y$ rendant le diagramme de la figure 3.1 commutatif est un morphisme de $\mathfrak{C}$.

Les triplets de catégorie $(\mathfrak{K}^{\mathrm{fos}}, \mathfrak{K}, \mathfrak{S})$ et $(\mathfrak{K}^{\mathrm{do}}_{\mathrm{g}}, \mathfrak{K}_{\mathrm{g}}, \mathfrak{T}_{\mathrm{g}})$ ont la propriété $(\star)$ (voir les propositions 3.2.10 et 3.2.13) et nous pouvons leur appliquer le théorème suivant :

$$
\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "m_1"] \arrow[dr, "n_1"'] & X_1 \amalg X_2 \arrow[d, "\alpha"] & X_2 \arrow[l, "m_2"'] \arrow[dl, "n_2"] \\
 & Y &
\end{tikzcd}
$$

FIG. 3.1: Diagramme commutatif d'un coproduit

3.2.2 Théorème *Si $(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}', \mathfrak{C}'')$ est un triplet de catégories avec la propriété $(\star)$, alors tout massif connexe dans $\mathfrak{C}$ est $\mathfrak{C}''$-équivalent à un mont dans $\mathfrak{C}$.*

3.2.3 Corollaire *Si $(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}', \mathfrak{C}'')$ est un triplet de catégories avec la propriété $(\star)$, alors tout massif dans $\mathfrak{C}$ est $\mathfrak{C}''$-équivalent à une union de monts dans $\mathfrak{C}$ sans vallée commune.*

Preuve Un massif est une union de massifs connexes et par le théorème 3.2.2 chacun de ces massifs est $\mathfrak{C}''$-équivalents à un mont. Donc par la proposition 3.1.9, un massif est $\mathfrak{C}''$-équivalent à une union de monts sans vallées communes. □

Nous allons voir maintenant quelques lemmes qui seront utilisés pour démonter le théorème 3.2.2.

3.2.4 Lemme *Si $M = (u_j : X \longrightarrow Y_j)_{j \in J}$ est un mont dans une catégorie $\mathfrak{C}$ concrète sur $\mathfrak{C}''$ avec $J = \{1, ..., N\}$, alors M est $\mathfrak{C}''$-équivalent au massif $\mathbb{M} := (M_i)_{i \in \{1,...,N-1\}}$ avec $M_i := (u_j : X \longrightarrow Y_j)_{j \in \{i,i+1\}}$ pour $i = 1, ..., N-1$(voir le figure 3.2).*

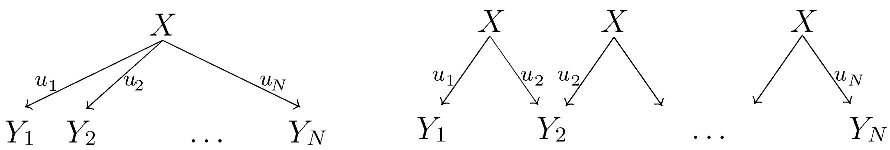

FIG. 3.2: N-mont et massif $\mathfrak{C}''$-équivalents d'après 3.2.4

Preuve Soit $(l_j : Y_j \longrightarrow L)_{j \in J}$ une famille de morphismes de $\mathfrak{C}''$. Si $(l_j)_{j \in J}$ est une liaison pour M, nous avons alors $l_j u_j = l_{j+1} u_{j+1}$ pour $j = 1, .., N-1$ ce qui signifie que $(l_j)_{j \in J}$ est une liaison pour $\mathbb{M}$. Si $(l_j)_{j \in J}$ est une liaison pour $\mathbb{M}$, nous avons alors $l_j u_j = l_{j+1} u_{j+1}$ pour $j = 1, .., N-1$. Il s'en suit que $l_{j'} u_{j'} = l_j u_j$ pour tout $j, j' \in J$ et $(l_j)_{j \in J}$ est une liaison pour M. □

3.2.5 Lemme *Si $M = (u_j : X \longrightarrow Y_j)_{j \in J}$ est un mont dans une catégorie $\mathfrak{C}$ concrète sur $\mathfrak{C}''$ avec $J = \{1, ..., N\}$, alors M est $\mathfrak{C}''$-équivalent au massif $\mathbb{M} = (M_i)_{i \in \{1,2\}}$ avec $M_1 := (u_j : X \longrightarrow Y_j)_{j \in \{1,2\}}$ et $M_2 := (u_j : X \longrightarrow Y_j)_{j \in \{2,...,N\}}$(voir le figure 3.3).*

Preuve Par le lemme 3.2.4, M est $\mathfrak{C}''$-équivalent à $\mathbb{M} := (M_i)_{i \in \{1,...,N-1\}}$ avec $M_i := (u_j : X \longrightarrow Y_j)_{j \in \{i,i+1\}}$ pour tout $i \in \{1, ..., N-1\}$. En appliquant à nouveau 3.2.4, $(M_i)_{i \in \{2,...,N-1\}}$ est $\mathfrak{C}''$-équivalent à $M' := (u_j : X \longrightarrow Y_j)_{j \in \{2,...,N\}}$. Par

$$
\begin{tikzcd}
& & X \arrow[dll, "u_1"'] \arrow[dl, "u_2"] \arrow[dr, "u_N"] & \\
Y_1 & Y_2 & \ldots & Y_N
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, "u_1"'] \arrow[dr, "u_2"] & & X \arrow[dl, "u_2"'] \arrow[d, "u_3"] \arrow[drr, "u_N"] & & \\
Y_1 & & Y_2 & Y_3 & \ldots & Y_N
\end{tikzcd}
$$

FIG. 3.3: N-mont et massif $\mathfrak{C}''$-équivalents d'après 3.2.5

le proposition 3.1.9, M est donc $\mathfrak{C}''$-équivalent au massif $M_1 \cup M'$, massif qui est $\mathfrak{C}''$-équivalent à $\mathbb{M}$. $\square$

3.2.6 Lemme *Si* $(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}', \mathfrak{C}'')$ *est un triplet de catégories avec la propriété* $(\star)$, $M_i := (u^i_j : X_i \longrightarrow Y_j)_{j \in J_i}$, $i = 1, 2$ *des monts dans* $\mathfrak{C}$ *avec* $J_1 \cap J_2 = \{j_0\}$ *et* $\operatorname{Card} J_1 = 2$, *alors le massif* $\mathbb{M} := (M_i)_{i \in \{1,2\}}$ *est* $\mathfrak{C}''$*-équivalent à un mont dans* $\mathfrak{C}$.

Preuve Sans restriction de la généralité, $J_1 := \{1, 2\}$, $J_2 := \{2, ..., N\}$. Posons $J := J_1 \cup J_2$. Posons $I := \{1, 2\}$. Par $(\star\text{d})$, il existe un pullback $(p_i : X \longrightarrow X_i)_{i \in I}$ dans $\mathfrak{C}'$ de $(u^i_2)_{i \in I}$ (voir la figure 3.4) et comme $(u^i_2)_{i \in I}$ est une famille de morphismes

$$
\begin{tikzcd}
& & X \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & & & \\
& X_1 \arrow[dl, "u^1_1"'] \arrow[dr, "u^1_2"] & & X_2 \arrow[dl, "u^2_2"'] \arrow[d, "u^2_3"] \arrow[drr, "u^2_N"] & & \\
Y_1 & & Y_2 & Y_3 & \ldots & Y_N
\end{tikzcd}
$$

FIG. 3.4: Diagramme induit par deux monts ayant une seule vallée commune

de $\mathfrak{C}$, il en est de même pour $(p_i)_{i \in I}$. Nous allons montrer que $\mathbb{M}$ est $\mathfrak{C}''$-équivalent à $M := (u_j : X \longrightarrow Y_j)_{j \in J}$ avec $u_j := u^i_j p_i$, $i \in I$, $j \in J_i$. Soit $(l_j : Y_j \longrightarrow L)_{j \in J}$ une famille de morphismes de $\mathfrak{C}''$. Si $(l_j)_{j \in J}$ est une liaison pour $\mathbb{M}$, nous avons alors $l_1 u_1 = l_1 u^1_1 p_1 = l_1 u^1_2 p_2 = l_2 u_2$. De plus pour $j \in \{2, \ldots, N\}$, nous avons $l_2 u_2 = l_2 u^2_2 p_2 = l_j u^2_j p_2 = l_j u_j$. Donc $(l_j)_{j \in J}$ est une liaison pour M.
Si $(l_j)_{j \in J}$ est une liaison pour M, nous avons $l_1 u^1_1 p_1 = l_1 u_1 = l_2 u_2 = l_2 u^1_2 p_1$. Par les propriétés $(\star\text{c})$ et $(\star\text{d})$, p_1 est un $\mathfrak{C}''$-épimorphisme et nous avons alors $l_1 u_{11} = l_2 u_{12}$. Soit $j, j' \in \{2, ..., N\}$. Nous avons $l_j u^2_j p_2 = l_j u_j = l_{j'} u_{j'} = l_{j'} u^2_{j'} p_2$. Comme p_2 est par $(\star\text{c})$ et $(\star\text{d})$ un $\mathfrak{C}''$-épimorphisme, il s'en suit que $l_j u^2_j = l_{j'} u^2_{j'}$. Donc $(l_j)_{j \in J}$ est une liaison pour $\mathbb{M}$. $\square$

3.2.7 Lemme *Soit* $(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}', \mathfrak{C}'')$ *un triplet de catégories avec la propriété* $(\star)$ *et soient* $M_i := (u^i_j : X_i \longrightarrow Y_j)_{j \in \{1,2\}}$, $i = 1, 2$ *des 2-monts dans* $\mathfrak{C}$ *ayant les mêmes vallées. Le massif* $\mathbb{M} := (M_i)_{i \in \{1,2\}}$ *est alors* $\mathfrak{C}''$*-équivalent à un mont dans* $\mathfrak{C}$.

Preuve Posons $J := \{1, 2\}$. Par la propriété $(\star\text{e})$, il existe un coproduit $(m_j : X_j \longrightarrow X_1 \amalg X_2)_{j \in J}$ dans $\mathfrak{C}'$ et il existe un morphisme $u_j : X_1 \amalg X_2 \longrightarrow Y_j$ de

$\mathfrak{C}$ avec $m_1 u_j = u_j^1$ et $m_2 u_j = u_j^2$, $j \in J$. Nous allons voir que $\mathbb{M}$ est $\mathfrak{C}''$-équivalent à $M := (u_j : X_1 \amalg X_2 \longrightarrow Y_j)_{j \in J}$. Soit $(l_j : Y_j \longrightarrow L)_{j \in J}$ une famille de morphismes de $\mathfrak{C}''$ (voir la figure 3.5). Si $(l_j)_{j \in J}$ est une liaison pour $\mathbb{M}$, c'est-à-dire si $l_1 u_1^i = l_2 u_2^i$

$$\begin{tikzcd}
 & Y_1 \arrow[drr, bend left, "l_1"] & & \\
X_1 \arrow[ur, "u_1^1"] \arrow[r, "m_1"] \arrow[dr, "u_2^1"'] & X_1 \amalg X_2 \arrow[u, "u_1"] \arrow[d, "u_2"] & X_2 \arrow[l, "m_2"'] \arrow[ul, "u_1^2"'] \arrow[dl, "u_2^2"] & L \\
 & Y_2 \arrow[urr, bend right, "l_2"'] & &
\end{tikzcd}$$

FIG. 3.5: Diagramme induit par deux 2-monts ayant les mêmes vallées

pour $i = 1, 2$, nous avons $l_1 u_1 m_i = l_1 u_1^i = l_2 u_2^i = l_2 u_2 m_i$, pour $i = 1, 2$. Comme $(m_j)_{j \in J}$ est aussi un coproduit dans $\mathfrak{C}''$, il suit du lemme 1.2.9 que $l_1 u_1 = l_2 u_2$. Donc $(l_j)_{j \in J}$ est une liaison pour $\mathbb{M}'$.
Si $(l_j)_{j \in J}$ est une liaison pour M, c'est-à-dire $l_1 u_1 = l_2 u_2$, nous avons pour $i \in \{1, 2\}$, $l_1 u_1^i = l_1 u_1 m_i = l_2 u_2 m_i = l_2 u_2^i$. Ce qui signifie que $(l_j)_{j \in J}$ est une liaison pour $\mathbb{M}$. □

Preuve de 3.2.2 Par le lemme 3.2.4, il suffit de démontrer le théorème pour les massifs dont les sommets n'ont que deux arêtes. Nous allons prouver ce théorème par induction sur le nombre de sommets k du massif. Si $k = 1$, nous avons 2 vallées et le massif est un 2-mont.
Soit $\mathbb{M}$ un massif dans $\mathfrak{C}$ à $k + 1$ sommets avec chacun deux arêtes. Nous pouvons enlever à $\mathbb{M}$ un 2-mont $M_1 = (u_j : X_1 \longrightarrow Y_j)_{j \in J_1}$ de manière à obtenir un massif connexe $\mathbb{M}_0 := \mathbb{M} \smallsetminus M_1$ à k sommets : chaque arête du graphe $\Gamma_{\mathbb{M}}$ correspond à un 2-mont, donc enlever un 2-mont correspond à enlever une arête de $\Gamma_{\mathbb{M}}$; si $\Gamma_{\mathbb{M}}$ est le graphe d'un arbre, alors $\Gamma_{\mathbb{M}}$ possède au moins un sommet avec une seule arête incidente et on enlève cette arête ; sinon, comme $\Gamma_{\mathbb{M}}$ est connexe, il possède au moins un cycle et nous enlevons une des arêtes de ce cycle. Nous avons donc $\mathbb{M} = \mathbb{M}_0 \cup M_1$. Par hypothèse d'induction, $\mathbb{M}_0$ est $\mathfrak{C}''$-équivalent à un mont $M_0 = (u_j : X_0 \longrightarrow Y_j)_{j \in J_0}$ et par la proposition 3.1.9, $\mathbb{M}$ est $\mathfrak{C}''$-équivalent à $M_0 \cup M_1$. Si M_0 et M_1 n'ont qu'une vallée en commun, d'après le lemme 3.2.6, $M_0 \cup M_1$ est $\mathfrak{C}''$-équivalent à un mont. Si M_0 est un 2-mont qui a les mêmes vallées que M_1, alors par le lemme 3.2.7, $M_0 \cup M_1$ est $\mathfrak{C}''$-équivalent à un mont. Si M_0 et M_1 ont deux vallées Y_{j_1}, Y_{j_2} en commun et si M_0 a plus de deux vallées, nous redécomposons M_0 en un 2-mont $M_2 := (u_{j_k} : X_0 \longrightarrow Y_{j_k})_{k \in \{1,2\}}$ et un mont $M_3 := (u_j : X_0 \longrightarrow Y_j)_{j \in J_0 \smallsetminus \{j_1\}}$ et par le lemme 3.2.5, M_0 est $\mathfrak{C}''$-équivalent à $M_2 \cup M_3$ et donc $\mathbb{M}$ est $\mathfrak{C}''$-équivalent à $M_1 \cup M_2 \cup M_3$. Par le lemme 3.2.7, $M_1 \cup M_2$ est $\mathfrak{C}''$-équivalent à un 2-mont M_4. Donc $\mathbb{M}$ est $\mathfrak{C}''$-équivalent à $M_3 \cup M_4$, c'est-à-dire à l'union d'un mont avec un 2-mont ayant une seule vallée en commun et d'après le lemme 3.2.6, un tel massif est $\mathfrak{C}''$-équivalent à un mont. □

3.2.8 Lemme *Soit* $\mathbb{M} := \big((u^i_j\!:X_i \longrightarrow Y_j)_{j\in\{i,i+1\}}\big)_{i\in\{1,\ldots,N-1\}}$ *un massif dans* $\mathfrak{K}$*. Notons*

$$X = X_1 \times_{Y_2} \ldots \times_{Y_{N-1}} X_{N-1} :=$$
$$\{x \in X_1 \times \ldots \times X_{n-1} : u^i_{i+1}(x_i) = u^{i+1}_{i+1}(x_{i+1}),\ i = 1, \ldots , N-2\}$$

le produit fibré et $p_i\!:X \longrightarrow X_i,\ i = 1, \ldots , N-1$ *les projections canoniques (voir le figure 3.6). Le mont* $M := (u_j\!:X \longrightarrow Y_j)_{j\in\{1,\ldots,N\}}$ *avec* $u_j := u^j_j p_j$ *pour* $j = 1, \ldots , N-1$ *et* $u_N := u^{N-1}_N$ *est un mont dans* $\mathfrak{K}$ *et toute liaison pour* $\mathbb{M}$ *dans* $\mathfrak{S}$ *est une liaison pour* M*. De plus si les arêtes de* $\mathbb{M}$ *sont discrètes, respectivement ouvertes, il en est de même pour les arêtes de* M*.*

$$\begin{tikzcd}
 & & & & & X_1 \times_{Y_1} \ldots \times_{Y_{N-1}} X_{N-1} \arrow[dllll, "p_1"'] \arrow[dll, "p_2"'] \arrow[dr, "p_{N-2}"] \arrow[drrr, "p_{N-1}"] & & & & \\
 & X_1 \arrow[dl, "u^1_1"'] \arrow[dr, "u^1_2"] & & X_2 \arrow[dl, "u^2_2"'] \arrow[dr] & \cdots & & X_{N-2} \arrow[dl] \arrow[dr, "u^{N-1}_{N-1}"] & & X_{N-1} \arrow[dl] \arrow[dr, "u^{N-1}_N"] & \\
Y_1 & & Y_2 & & \cdots & & & Y_{N-1} & & Y_N
\end{tikzcd}$$

FIG. 3.6: Massifs intervenant dans le lemme 3.2.8

Preuve Il suit directement de la définition du produit fibré que toute liaison pour $\mathbb{M}$ dans $\mathfrak{S}$ est une liaison pour M. Nous allons démontrer par induction sur le nombre de vallées de $\mathbb{M}$ que si les arêtes de $\mathbb{M}$ sont discrètes, respectivement ouvertes, alors les projections canoniques $p_1, \ldots , p_{N-1}$ sont également ouvertes, respectivement discrètes. Pour l'ancrage $N = 2$, il n'y a rien a montrer.
Nous faisons maintenant l'hypothèse que si $\mathbb{M}$ a $N-1$ vallées, $N > 2$, et si ses arêtes sont ouvertes respectivement discrètes, il en est de même pour les projections canoniques $p'_i\!:X' \longrightarrow X_i,\ i = 1, \ldots , N-2,\ X' := X_1 \times_{Y_2} \ldots \times_{Y_{N-2}} X_{N-2}$. Nous définissons les projections canoniques $q\!:X' \times_{Y_{N-1}} X_{N-1} \longrightarrow X'$ et $r\!:X' \times_{Y_{N-1}} X_{N-1} \longrightarrow X_{N-1}$. Pour $x' \in X'$, nous avons

$$q^{-1}(x') = \{x'\} \times \big((u^{N-1}_{N-1})^{-1} u^{N-2}_{N-1} p'_{N-2}(x')\big)$$

et pour $x \in X_{N-1}$ nous avons

$$r^{-1}(x) = \big((u^{N-2}_{N-1} p'_{N-2})^{-1} u^{N-1}_{N-1}(x)\big) \times \{x\}.$$

Donc si les arêtes de $\mathbb{M}$ sont discrètes, par hypothèse d'induction, p_{N-2} est discrète et donc q, r aussi.
Soit $U \Subset X_{N-1}$ et $U' \Subset X'$. Nous avons

$$q\big((U' \times U) \cap (X' \times_{Y_{N-1}} X_{N-1})\big) = U' \cap (u^{N-2}_{N-1} p'_{N-2})^{-1} u^{N-1}_{N-1}(U),$$

$$r\big((U' \times U) \cap (X' \times \times_{Y_{N-1}} X_{N-1})\big) = U \cap (u^{N-1}_{N-1})^{-1} u^{N-2}_{N-1} p'_{N-2}(U').$$

Dons si les arêtes de $\mathbb{M}$ sont ouvertes, par hypothèse d'induction, p'_{N-2} est ouverte et donc q, r aussi.
Notons α le biholomorphisme canonique entre $X_1 \times_{Y_2} \ldots \times_{Y_{N-1}} X_{N-1}$ et $X' \times_{Y_{N-1}} X_{N-1}$. Nous avons $p_i = p'_i q\alpha$ pour $i = 1, \ldots, N-2$ et $p_{N-1} = r\alpha$. Il s'en suit qui si les arêtes de $\mathbb{M}$ sont discrètes, respectivement ouvertes, alors les projections canoniques $p_1, \ldots, p_{N-1}$ sont également discrètes, respectivement ouvertes. □

3.2.9 Remarque Dans le lemme 3.2.8, le mont M et le massif $\mathbb{M}$ ne sont pas forcément $\mathfrak{S}$-équivalents car les arêtes de $\mathbb{M}$ ne sont pas forcément surjectives. Le produit fibré peut par conséquent être vide.

3.2.10 Proposition *Le triplet* $(\mathfrak{K}^{\text{fos}}, \mathfrak{K}, \mathfrak{S})$ *à la propriété* $(\star)$.

Preuve Ad $(\star$a)-$(\star$b)-$(\star$c)**.** Evident.

Ad $(\star$d)**.** Posons $I := \{1, 2\}$. Soit $(f_i\colon X_i \longrightarrow Y)_{i\in I}$ une famille de morphismes de $\mathfrak{K}$. Nous allons voir que le produit fibré $X_1 \times_Y X_2$ avec les projections canoniques p_1 et p_2 sur X_1 et X_2 est un pullback dans $\mathfrak{K}$.
Comme $(p_i)_{i\in I}$ est une famille de morphismes de $\mathfrak{K}$, il faut encore vérifier que $(p_i)_{i\in I}$ a la propriété du pullback. Soit $(q_i\colon Z \longrightarrow X_i)_{i\in I}$ une famille de morphismes de $\mathfrak{K}$ avec $f_1 q_1 = f_2 q_2$. L'application $\alpha\colon Z \longrightarrow X_1 \times_Y X_2,\ \alpha(z) := \big(q_1(z), q_2(z)\big)$ $\big($nous avons $\big(q_1(z), q_2(z)\big) \in X_1 \times_Y X_2$ car $f_1 q_1 = f_2 q_2\big)$ est l'unique morphisme de $\mathfrak{K}$ tel que $p_i\alpha = q_i,\ i \in I$. Donc $(p_i)_{i\in I}$ est un pullback dans $\mathfrak{K}$ pour $(f_i)_{i\in I}$.
Il faut encore vérifier que si $(f_i)_{i\in I}$ est une famille de morphismes de $\mathfrak{K}^{\text{fos}}$, alors $(p_i)_{i\in I}$ est aussi une famille de morphismes de $\mathfrak{K}^{\text{fos}}$. La projection p_1 est discrète et ouverte car f_1 et f_2 le sont (voir le lemme 3.2.8). p_1 est surjective car f_2 est surjective. p_1 est propre car pour tout compact $K \subset X_1$, $p_1^{-1}(K)$ est un sous-ensemble fermé du compact $K \times f_2^{-1} f_1(K)$, donc un ensemble compact. p_1 est donc un morphisme de $\mathfrak{K}^{\text{fos}}$ et de manière analogue nous pouvons montrer qu'il en est de même pour p_2.

Ad $(\star$e)**.** Soit X_1, X_2 des objets de $\mathfrak{K}$. On vérifie facilement que le coproduit dans $\mathfrak{K}$ et dans $\mathfrak{S}$ est donné par $X_1 \amalg X_2 := X_1 \dot\cup X_2$ avec les injections canoniques. De plus si $(n_i\colon X_i \longrightarrow Z)_{i\in\{1,2\}}$ est une famille de morphismes de $\mathfrak{K}^{\text{fos}}$, alors $\alpha\colon X_1 \amalg X_2 \longrightarrow Z$, $\alpha(x) := n_i(x)$ pour $x \in X_i, i \in \{1, 2\}$, est un morphisme de $\mathfrak{K}^{\text{fos}}$ car n_1 et n_2 sont finies, ouvertes et surjectives. □

3.2.11 Remarques et exemples

(i) Le pullback n'existe pas toujours dans $\mathfrak{K}^{\text{fos}}$, c'est pour cette raison que $(\star$d) ne l'exige pas. Nous allons voir un exemple où cela se produit.
Considérons la famille de morphismes $(f_i\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C})_{i\in I},\ I := \{1, 2\},\ f_1(x) = f_2(x) := x^2$. Comme nous l'avons vu dans la preuve du théorème 3.2.10, le pullback de $(f_i)_{i\in I}$ dans $\mathfrak{K}$ est

$$\Big(p_i\colon P = \big\{(u, v) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} : u^2 = v^2\big\} \longrightarrow \mathbb{C}\Big)_{i\in I},$$

où p_1, p_2 sont les projections canoniques. Nous avons encore vu que p_1, p_2 sont des morphismes de $\mathfrak{K}^{\text{fos}}$ car f_1 et f_2 le sont. Supposons qu'il existe un pullback $(p'_i : P' \longrightarrow \mathbb{C})_{i\in I}$ de $(f_i)_{i\in I}$ dans $\mathfrak{K}^{\mathrm{fos}}$. Comme $(p'_i)_{i\in I}$ est un pullback dans $\mathfrak{K}^{\mathrm{fos}}$ et $(p_i)_{i\in I}$ est une famille de morphismes de $\mathfrak{K}^{\mathrm{fos}}$, il existe un morphisme $\alpha : P \longrightarrow P'$ de $\mathfrak{K}^{\mathrm{fos}}$ tel que $\alpha p'_j = p_j$ pour tout $j \in J$ et comme $(p_i)_{i\in I}$ est un pullback dans $\mathfrak{K}$, il existe un morphisme $\beta : P' \longrightarrow P$ de $\mathfrak{K}$ tel que $\beta p_j = p'_j$ pour tout $j \in J$. Par la propriété universelle du pullback, nous devons avoir $\beta\alpha = \mathrm{Id}_P$ et comme α est surjectif, il s'en suit que P et P' sont biholomorphes. Cependant $(p_i)_{i\in I}$ n'est pas un pullback dans $\mathfrak{K}^{\mathrm{fos}}$. Considérons $\big(q_i : Z := \mathbb{C} \times \{1, 2\} \longrightarrow \mathbb{C}\big)_{i\in I}$ avec $q_1(x, k) := (-1)^k x$ et $q_2(x, k) := x,\ k \in \{1, 2\}$. L'unique morphisme $\alpha : Z \longrightarrow P$ tel que $p_i\alpha = q_i,\ i \in I$ est $\alpha(x, k) := \big((-1)^k x, x\big)$, mais α n'est pas ouvert donc pas un morphisme de $\mathfrak{K}^{\mathrm{fos}}$.

(ii) Dans $\mathfrak{K}^{\mathrm{fos}}$, le coproduit n'existe pas car pour deux espaces complexes non vides X_1, X_2, les injections $X_i \to X_1 \amalg X_2$ ne sont jamais surjectives.

3.2.12 Corollaire *Tout massif connexe dans $\mathfrak{K}^{\mathrm{fos}}$ est $\mathfrak{S}$-équivalent à un mont dans $\mathfrak{K}^{\mathrm{fos}}$.*

Preuve C'est une conséquence du théorème 3.2.2 et de la proposition 3.2.10. □

3.2.13 Proposition *Le triplet de catégories $(\mathfrak{K}_{\mathrm{g}}^{\mathrm{do}}, \mathfrak{K}_{\mathrm{g}}, \mathfrak{T}_{\mathrm{g}})$ a la propriété $(\star)$.*

Preuve Ad $(\star\mathrm{a})$**-**$(\star\mathrm{b})$**.** Évident.

Ad $(\star\mathrm{c})$**.** Pour montrer que les morphismes de $\mathfrak{K}_{\mathrm{g}}^{\mathrm{do}}$ sont des $\mathfrak{T}_{\mathrm{g}}$-épimorphismes, nous allons montrer que tout morphisme $f_a : X_a \longrightarrow Y_b$ de $\mathfrak{K}_{\mathrm{g}}^{\mathrm{do}}$ possède un représentant surjectif défini sur un ensemble arbitrairement petit. Si $f : X \longrightarrow Y$ est un représentant ouvert d'un morphisme $f_a : X_a \longrightarrow Y_b$ de $\mathfrak{K}_{\mathrm{g}}^{\mathrm{do}}$, alors pour tout voisinage $U \Subset X$ de a, $f|_U : U \longrightarrow f(U)$ est un représentant surjectif de f_a.

Ad $(\star\mathrm{d})$**.** Soit $(f_{i,a_i} : X_{i,a_i} \longrightarrow Y_b)_{i\in I},\ I := \{1, 2\}$, une famille de morphismes de $\mathfrak{K}_{\mathrm{g}}$ et soit $f_i : X_i \longrightarrow Y$ un représentant de $f_i,\ i \in I$. Nous avons montré dans la preuve du théorème 3.2.10 que $(p_i : X_1 \times_Y X_2 \longrightarrow X_i)_{i\in I}$ est un pullback pour $(f_i)_{i\in I}$ dans $\mathfrak{K}$, où p_1, p_2 sont les projections canoniques. Par le lemme 3.2.8, si $(f_i)_{i\in I}$ est une famille de morphismes discrets ouverts il en était de même pour $(p_i)_{i\in I}$. Donc $(p_{i,(a_1,a_2)})_{i\in I}$ est une famille de morphismes dans $\mathfrak{K}_{\mathrm{g}}^{\mathrm{do}}$ si $(f_{i,a_i})_{i\in I}$ est une famille de morphismes dans $\mathfrak{K}_{\mathrm{g}}^{\mathrm{do}}$.
Nous devons encore montrer que $(p_{i,(a_1,a_2)})_{i\in I}$ est un pullback pour $(f_{i,a_i})_{i\in I}$ dans $\mathfrak{K}_{\mathrm{g}}$. Soit $(q_{i,z} : Z_z \longrightarrow X_{i,a_i})_{i\in I}$ une famille de morphismes de $\mathfrak{K}_{\mathrm{g}}$ telle que $f_{1,a_1} q_{1,z} = f_{2,a_2} q_{2,z}$ et soit $q_i : Z \longrightarrow X'_i$ un représentant de $q_{i,z}$ avec $X'_i \Subset X_i,\ i \in I$. L'unique morphisme α_z de $\mathfrak{K}_{\mathrm{g}}$ tel que $p_{i,(a_1,a_2)}\alpha_z = q_{i,z},\ i \in I$, est le germe de $\alpha : Z \longrightarrow X_1 \times_Y X_2,\ \alpha(z) := \big(q_1(z), q_2(z)\big)$: α_z est unique car sa définition est indépendante du choix des différents représentants utilisés.

Ad $(\star\mathrm{e})$**.** Soit $X_{i,a_i},\ i \in I := \{1, 2\}$ des objets de $\mathfrak{T}_{\mathrm{g}}$. Nous allons voir que le coproduit dans $\mathfrak{T}_{\mathrm{g}}$ est

$$X_{1,a_1} \amalg X_{2,a_2} := \big((X_1 \dot\cup X_2)/R\big)_a$$

avec les germes des applications canoniques $m_i : X_i \longrightarrow (X_1 \dot{\cup} X_2)/R$, où X_i est un représentant de X_{i,a_i} pour $i \in I$,

$$R := \Delta_{X_1 \dot{\cup} X_2} \cup \big\{(a_1, a_2), (a_2, a_1)\big\}$$

et $a := R(a_1) = R(a_2)$. Remarquons que la définition de $X_{1,a_1} \amalg X_{2,a_2}$ est indépendante du choix des représentants.
Soit $n_{i,a_i} : X_{i,a_i} \longrightarrow Z_z, i \in I$ des morphismes de $\mathfrak{T}_{\mathrm{g}}$ et $n_i : X'_i \longrightarrow Z$ un représentant de n_{i,a_i} avec $X'_i \Subset X_i,\ i \in I$. Nous avons $(X'_1 \dot{\cup} X'_2)/R \Subset (X_1 \dot{\cup} X_2)/R$ et le germe de $\alpha : (X'_1 \dot{\cup} X'_2)/R \longrightarrow Z,\ \alpha\big(R(x_i)\big) := n_i(x_i)$ pour $x_i \in X_i,\ i \in I$ en a est l'unique morphisme de $\mathfrak{T}_{\mathrm{g}}$ tel que $\alpha_a m_{i,a_i} = n_{i,a_i},\ i \in I$ (α_z est unique car sa définition est indépendante du choix des différents représentants utilisés). De plus si $(n_{i,a_i})_{i\in I}$ est une famille de morphismes discrets ouverts , nous pouvons choisir des représentants n_i discrets ouverts et α est alors aussi discret ouvert.
Nous allons voir que si $X_{i,a_i},\ i \in I$ sont des objets de $\mathfrak{K}_{\mathrm{g}}$, alors $(m_{i,a_i})_{i\in I}$ est un coproduit dans $\mathfrak{K}_{\mathrm{g}}$. Pour vérifier ceci, il suffit de montrer que $(X_1 \dot{\cup} X_2)/R$ est localement holomorphiquement séparable (R étant finie, le théorème de Cartan implique que $(X_1 \dot{\cup} X_2)/R$ est un espace complexe). Soit $x \in X_1 \dot{\cup} X_2$. Si $R(x) \neq R(a_1)$, il existe $U \Subset X_1 \dot{\cup} X_2$ avec $U \cap R(a_1) = \emptyset$. Donc $\pi(U) \Subset (X_1 \dot{\cup} X_2)/R$ est holomorphiquement séparable (nous notons $\pi : X_1 \dot{\cup} X_2 \longrightarrow (X_1 \dot{\cup} X_2)/R$ la projection canonique). Si $R(x) = R(a_1)$, il existe des voisinages U_i de $a_i,\ i = 1, 2$ et des applications injectives $\phi : U_1 \longrightarrow \mathbb{C}^n,\ \psi : U_2 \longrightarrow \mathbb{C}^m$ avec $\phi(a_1) = 0$ et $\psi(a_2) = 0$. Nous définissons une fonction $f : U_1 \dot{\cup} U_2 \longrightarrow \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m,\ f(x) := \big(\phi(x), 0\big)$ si $x \in U_1$ et $f(x) := \big(0, \psi(x)\big)$ si $x \in U_2$. La fonction f est holomorphe R-invariante avec pour $x_1 \in X^1$ et $x_2 \in X^2$, $f(x_1) = f(x_2)$ si et seulement si $R(x_1) = R(x_2)$. Le quotient $(X_1 \dot{\cup} X_2)/R$ est donc localement holomorphiquement séparable et $(m_{i,a_i})_{i\in I}$ est le coproduit dans $\mathfrak{K}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{g}}$. □

3.2.14 Remarque Considérons les germes d'espaces complexes inclus dans $\mathbb{C}^2$ suivants : $\{xy = 0\}_{(0,0)}$ et $\{x = y\}_{(0,0)}$. Leur coproduit n'est pas égal à $\big\{xy(x - y) = 0\big\}_{(0,0)}$. En effet, cet espace n'est pas maximal alors que $\{xy = 0\}_{(0,0)} \amalg \{x = y\}_{(0,0)}$ l'est.

3.2.15 Corollaire *Tout massif connexe dans $\mathfrak{K}^{\mathrm{do}}_{\mathrm{g}}$ est $\mathfrak{T}_{\mathrm{g}}$-équivalent à un mont dans $\mathfrak{K}^{\mathrm{do}}_{\mathrm{g}}$.*

Preuve C'est une conséquence du théorème 3.2.2 et de la proposition 3.2.13. □

3.3 Pushouts dans la catégorie des espaces complexes

Dans cette section $\mathfrak{C}$ désignera une catégorie dont les objets sont des ensembles, des espaces topologiques ou des espaces complexes réduits. Nous allons traiter plus particulièrement le cas où $\mathfrak{C} = \mathfrak{K}^{\mathrm{fos}}$. Nous terminerons la section par un théorème nous donnant des conditions pour l'existence d'un pushout pour un massif dans $\mathfrak{K}^{\mathrm{fos}}$.

3.3.1 Définitions

(i) *Un mont* $M := (u_j : X \to Y_j)_{j\in J}$ *dans* $\mathfrak{C}$ *définit de manière canonique une relation* R *(et donc aussi une relation d'équivalence* R^∞*) sur* $Y := \dot{\bigcup}_{j\in J} Y_j$ *:*

$$R := \left(\bigcup_{j,j'\in J} (u_j, u_{j'})(X) \right) \cup \Delta_Y .$$

(ii) *Soit* $\mathbb{M} := (M_i)_{i\in I}$ *un massif dans* $\mathfrak{C}$ *avec* $(Y_j)_{j\in J}$ *comme vallées.* M *définit de manière canonique une relation* R *sur* $\dot{\bigcup}_{j\in J} Y_j$ *:*

$$R := \bigcup_{i\in I} R_i,$$

où R_i *est la relation canonique définie par* M_i*,* $i \in I$.

3.3.2 Lemme *Soit* $(u_j : X \to Y_j)_{j\in J}$ *un mont dans* $\mathfrak{C}$ *et* R *la relation canonique qu'il induit. Pour* $j \in J$ *et* $y \in Y_j$*, nous avons :*

$$R(y) = \{y\} \cup \left(\bigcup_{j'\in J} u_{j'} u_j^{-1}(y) \right) .$$

Par conséquent pour $U \subset \dot{\bigcup}_{j\in J} Y_j$*, nous avons :*

$$R(U) = U \cup \left(\bigcup_{j,j'\in J} u_{j'} u_j^{-1}(U \cap Y_j) \right) .$$

Preuve Calcul direct. □

3.3.3 Théorème *Un massif dans* $\mathfrak{T}_s$ *dont les arêtes sont ouvertes, respectivement quasi-finies, respectivement finies, respectivement propres, induit une relation canonique ouverte, respectivement quasi-finie, respectivement finie, respectivement propre.*

Preuve Découle directement du théorème 2.1.11 et du lemme 3.3.2. □

3.3.4 Théorème *Si les arêtes d'un massif dans* $\mathfrak{K}$ *sont propres, la relation canonique induite est analytique.*

Preuve Soit $(u_j : X \to Y_j)_{j\in J}$ un mont dans $\mathfrak{K}$ dont les arêtes sont propres et R la relation canonique induite. Pour tout $j, j' \in J$, les applications $(u_j, u_{j'}) : X \to Y_j \times Y_{j'}$ sont propres ([Bou71, I§10.1, corollaire 3]), donc $(u_j, u_{j'})(X)$ est un ensemble analytique. R est alors une réunion finie d'ensembles analytiques ce qui signifie que c'est un ensemble analytique.
La relation canonique engendrée par un massif étant une réunion finie de relations engendrées par des monts, il s'en suit que si les arêtes d'un massif sont propres, la relation canonique définie par celui-ci est une réunion finie de relations analytiques, donc une relation analytique. □

3.3.5 Lemme *Soit $(u_j : X \longrightarrow Y_j)_{j\in J}$ un mont dans $\mathfrak{C}$ dont les arêtes sont surjectives et $(l_j : Y_j \longrightarrow L)_{j\in J}$ une liaison pour M dans $\mathfrak{S}$. Pour tout $j, j' \in J$ et pour tout $z \in L$, nous avons $l_j^{-1}(z) = u_j u_{j'}^{-1} l_{j'}^{-1}(z)$.*

Preuve Soit $j, j' \in J$ et $z \in L$.
"$\subset$" Soit $y \in l_j^{-1}(z)$. Comme u_j est surjective, il existe $x \in X$ tel que $u_j(x) = y$. Comme $l_{j'}u_{j'} = l_j u_j$, nous avons $u_{j'}(x) \in l_{j'}^{-1}(z)$ et par conséquent $y \in u_j u_{j'}^{-1} l_{j'}^{-1}(z)$.
"$\supset$" Soit $y \in u_j u_{j'}^{-1} l_{j'}^{-1}(z)$. Il existe $x \in u_{j'}^{-1} l_{j'}^{-1}(z)$ avec $u_j(x) = y$. Comme $l_{j'}u_{j'} = l_j u_j$, nous avons $l_j(y) = l_j u_j(x) = l_{j'}u_{j'}(x) = z$ donc $y \in l_j^{-1}(z)$. □

3.3.6 Proposition *Soit $M := (u_j : X \to Y_j)_{j\in J}$ un mont dans $\mathfrak{C}$, $(l_j : Y_j \to L)_{j\in J}$ une famille de morphismes de $\mathfrak{S}$ et R la relation canonique induite par M sur $Y := \dot\bigcup_{j\in J} Y_j$. L'application $l : Y \to L$, $l|_{Y_j} := l_j$ est R-invariante si et seulement si $(l_j)_{j\in J}$ est une liaison pour M.*

Preuve "$\Rightarrow$" Soit $x \in X$ et $j, j' \in J$. Nous avons $\big(u_j(x), u_{j'}(x)\big) \in R$ par définition de R. Comme l est R-invariante et par définition de l, nous avons $l_j u_j(x) = l u_j(x) = l u_{j'}(x) = l_{j'}u_{j'}(x)$. Comme x, j et j' sont quelconques, $(l_j)_{j\in J}$ est une liaison pour M.
"$\Leftarrow$" Soit $j, j' \in J$, $y \in Y_j$, $y' \in Y_{j'}$ avec $(y, y') \in R$. Il existe $x \in X$ avec $u_j(x) = y$ et $u_{j'}(x) = y'$. Nous avons donc $l(y) = l_j(y) = l_j u_j(x) = l_{j'}u_{j'}(x) = l_{j'}(y') = l(y')$. L'application l est donc R-invariante. □

3.3.7 Corollaire *Soit $\mathbb{M}$ un massif dans $\mathfrak{C}$ avec $(Y_j)_{j\in J}$ comme vallées, $(l_j : Y_j \to L)_{j\in J}$ une famille de morphismes de $\mathfrak{S}$ et R la relation canonique induite par $\mathbb{M}$ sur $Y := \dot\bigcup_{j\in J} Y_j$. L'application $l : Y \to L$, $l|_{Y_j} := l_j$, est R-invariante si et seulement si $(l_j)_{j\in J}$ est une liaison pour $\mathbb{M}$.*

Preuve Posons $\mathbb{M} := (M_i)_{i\in I}$ avec $M_i := (u_j^i : X_i \longrightarrow Y_j)_{j\in J_i}$ et R_i la relation induite par M_i. La famille $(l_j)_{j\in J}$ est une liaison pour $\mathbb{M}$ si et seulement si pour tout $i \in I$, $(l_j)_{j\in J_i}$ est une liaison pour M_i. Donc par la proposition 3.3.6, $(l_j)_{j\in J}$ est une liaison pour $\mathbb{M}$ si et seulement si pour tout $i \in I$ la restriction de l sur $\dot\bigcup_{j\in J_i} Y_j$ est R_i-invariante, c'est-à-dire si et seulement si l est R_i-invariante pour tout $i \in I$. Il s'en suit que $(l_j)_{j\in J}$ est une liaison pour $\mathbb{M}$ si et seulement si l est R-invariante. □

3.3.8 Corollaire *Soit $\mathbb{M}$ un massif connexe dans $\mathfrak{C}$ avec $(Y_j)_{j\in J}$ comme vallées et dont les arêtes sont surjectives, R la relation canonique induite par $\mathbb{M}$ sur $Y := \dot\bigcup_{j\in J} Y_j$ et Y_0 une vallée de $\mathbb{M}$. Si $l_0 : Y_0 \longrightarrow L$ est un morphisme $R^\infty|_{Y_0}$-invariant de $\mathfrak{S}$ alors il existe un unique prolongement $l : Y \longrightarrow L$ de l_0 tel que $(l|_{Y_j})_{j\in J}$ soit une liaison pour $\mathbb{M}$.*

Preuve Comme les arêtes de $\mathbb{M}$ sont surjectives, pour tout $j \in J$ et pour tout $y \in Y_j$, $R^\infty(y) \cap Y_0 \neq \emptyset$. Pour $j \in J$ et pour tout $y \in Y_j$ nous posons $l(y) := l_0(R^\infty(y) \cap Y_0)$. Par le corollaire 3.3.7, l est l'unique prolongement de l_0 sur $\dot\bigcup_{j\in J} Y_j$ tel que $(l|_{Y_j})_{j\in J}$ soit une liaison pour $\mathbb{M}$ dans $\mathfrak{S}$. □

3.3.9 Proposition *Deux massifs dans $\mathfrak{C}$ sont $\mathfrak{S}$-équivalents si et seulement s'ils ont les mêmes vallées et s'ils induisent la même relation d'équivalence.*

Preuve Soit $\mathbb{M}$ un massif dans $\mathfrak{C}$ avec $(Y_j)_{j\in J}$ comme vallées. Posons $Y := \dot{\bigcup}_{j\in J} Y_j$.
"$\Rightarrow$" Soit $\mathcal{L}$ l'ensemble des liaisons pour $\mathbb{M}$ dans $\mathfrak{S}$ et R la relation canonique induite par $\mathbb{M}$. Par le corollaire 3.3.7, nous avons $R^\infty(y) \subset \bigcap_{l\in\mathcal{L}} l^{-1}l(y)$ pour tout $y \in Y$. Cette inclusion est même une égalité car si R est la relation canonique induite par $\mathbb{M}$, la projection $p : Y \to Y/R$ induit une liaison pour $\mathbb{M}$ dans $\mathfrak{S}$. De cette égalité découle immédiatement l'implication.
"$\Leftarrow$" Par le corollaire 3.3.7, deux massifs induisant la même relation d'équivalence ont le même ensemble de liaisons. □

3.3.10 Définition *Soit $M := (u_j : X \longrightarrow Y_j)_{j\in J}$ un mont dans $\mathfrak{C}$ dont les arêtes sont surjectives. Pour $j \in J$, la* ***relation d'holonomie*** *de M sur Y_j est la relation*

$$H_j := (u_j \times u_j) \bigcup_{j'\in J} R^{u_{j'}}.$$

Le lemme suivant nous montre que la relation d'holonomie d'un mont contient non seulement toute la "dynamique" d'un mont sur une de ses vallées, mais sa "dynamique" tout entière.

3.3.11 Lemme *Soit $M = (u_j : X \to Y_j)_{j\in J}$ un mont dans $\mathfrak{C}$ dont les arêtes sont surjectives, R la relation canonique induite par M et H_0 la relation d'holonomie sur une vallée Y_0 de M. Nous avons les égalités suivantes :*

(a) $H_0 = R^2|_{Y_0}$,

(b) $H_0^\infty = R^\infty|_{Y_0}$,

(c) $R^\infty = \bigcup_{j,j'\in J} (u_j \times u_{j'})(u_0 \times u_0)^{-1}(H_0^\infty)$.

Preuve Ad (a)**.** "$\subset$" Soit $(y_0, y_2) \in H_0$. Il existe $j \in J$ et $(x_0, x_2) \in R^{u_j}$ tels que $(u_0 \times u_0)(x_0, x_2) = (y_0, y_2)$. Posons $y_1 := u_j(x_0) = u_j(x_2)$ et nous avons $(u_0, u_j)(x_0) = (y_0, y_1) \in R$, $(u_j, u_0)(x_2) = (y_1, y_2) \in R$, donc $(y_0, y_2) \in R^2|_{Y_0}$.
"$\supset$" Soit $(y_0, y_2) \in R^2|_{Y_0}$. Il existe $j \in J$ et $y_1 \in Y_j$ tel que $(y_0, y_1) \in R$ et $(y_1, y_2) \in R$. Il s'en suit qu'il existe $x_0, x_2 \in X$ tels que $u_0(x_0) = y_0$, $u_j(x_0) = y_1$, $u_j(x_2) = y_1$ et $u_0(x_2) = y_2$. Par conséquent, (x_0, x_2) est dans R^{u_j} et $(y_0, y_2) = (u_0 \times u_0)(x_0, x_2) \in (u_0 \times u_0)(R^{u_j}) \subset H_0$.

Ad (b)**.** "$\subset$" H_0^∞ est la plus petite relation d'équivalence contenant H_0 et $H_0 = R^2|_{Y_0} \subset R^\infty|_{Y_0}$.
"$\supset$" Soit $(y, y') \in R^\infty|_{Y_0}$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ avec $(y, y') \in R^n|_{Y_0}$. Il existe donc $j_k \in J$, $y_k \in Y_{j_k}$, $k = 1, \ldots, n-1$ avec $(y_k, y_{k+1}) \in R$ pour $k = 0, \ldots, n-1$, et $y_0 := y$, $y_n := y'$. Il s'en suit que pour $k = 0, \ldots, n-1$, il existe $x_k \in X$ avec $(u_{j_k}, u_{j_{k+1}})(x_k) = (y_k, y_{k+1})$. Par conséquent, (x_k, x_{k+1}) est dans $R^{u_{j_{k+1}}}$ et $(u_0 \times u_0)(x_k, x_{k+1}) \in H_0$ pour $k = 0, \ldots n-2$. Comme $u_0(x_0) = y_0 = y$ et $u_0(x_{n-1}) = y_n = y'$, (y, y') est dans H_0^{n-1}.

Ad (c)**.** Nous allons voir que pour $y \in Y_0$, nous avons $R^\infty(y) = \bigcup_{j\in J} u_j u_0^{-1}\big(H_0^\infty(y)\big)$, ce qui est équivalent avec l'égalité à démontrer. Par définition de R et comme $H_0^\infty \subset R^\infty$, $\bigcup_{j\in J} u_j u_0^{-1}\big(H_0^\infty(y)\big)$ est inclu dans $R^\infty(y)$. Soit $j \in J$ et $y' \in R^\infty(y) \cap Y_j$, nous avons alors $u_0 u_j^{-1}(y') \subset R^\infty(y) \cap Y_0 = H_0^\infty(y)$ et il s'en suit que $y' \in u_j u_0^{-1}\big(H_0(y)\big)$, ce qui démontre l'autre inclusion. □

3.3.12 Définition *Soit $\mathbb{M}$ un massif connexe dans $\mathfrak{C}$. Une **relation d'holonomie** de $\mathbb{M}$ sur une vallée Y_0 est la relation d'holonomie de M sur Y_0, où M est un mont dans $\mathfrak{C}$ dont les arêtes sont surjectives et qui est $\mathfrak{S}$-équivalent à $\mathbb{M}$.*

3.3.13 Remarque Si un massif connexe $\mathbb{M}$ dans $\mathfrak{S}$ possède une relation d'holonomie H_0 sur une vallée Y_0, celle-ci n'est pas unique. Cependant, les propositions 3.3.9 et 3.3.11 nous garantissent que différentes relations d'holonomie de $\mathbb{M}$ définies sur une même vallée engendrent la même relation d'équivalence. D'autre part, si M est un mont dans $\mathfrak{S}$ qui est $\mathfrak{S}$-équivalent à $\mathbb{M}$, dont les arêtes sont surjectives et qui a H_0 comme relation d'holonomie sur Y_0, alors il suit du corollaire 3.3.8, qu'un morphisme $l_0 : Y_0 \longrightarrow L$ de $\mathfrak{S}$ qui est H_0-invariant peut être prolongé de manière unique en une liaison pour M (et donc aussi pour $\mathbb{M}$) dans $\mathfrak{S}$. Si $\mathbb{M}$ est un massif dans $\mathfrak{T}$ dont les arêtes sont ouvertes et l_0 un morphisme de $\mathfrak{T}$ qui est H_0-invariant alors le prolongement de l_0 est continu. De plus si les arêtes de $\mathbb{M}$ sont discrètes et H_0^∞ discrète, ce prolongement est aussi discret.

3.3.14 Théorème *(d'après [Egg80, 6.24]) Soit $\mathbb{M}$ un massif connexe dans $\mathfrak{K}^{\mathrm{fos}}$ dont les vallées $(Y_j)_{j\in J}$ sont connexes et normales. Soit R la relation canonique induite par $\mathbb{M}$ sur $Y := \dot{\bigcup}_{j\in J} Y_j$ et H_0 une relation d'holonomie sur une vallée Y_0. Les énoncés suivants sont équivalents :*

(i) *R^∞ est une relation d'équivalence analytique finie.*

(ii) *H_0^∞ est une relation d'équivalence analytique finie.*

(iii) *Il existe un compact $K \subset Y$ qui est R-saturé et Y/R est séparé.*

(iv) *Il existe un compact $K_0 \subset Y_0$ qui est H_0-saturé et Y_0/H_0 est séparé.*

(v) *Y/R est un espace complexe et la projection canonique $\pi : Y \longrightarrow Y/R$ est finie.*

(vi) *Y_0/H_0 est un espace complexe et la projection canonique $\pi_0 : Y_0 \longrightarrow Y_0/H_0$ est finie.*

(vii) *La projection canonique $\pi : Y \longrightarrow Y/R$ est propre et $(\pi|_{Y_j})_{j\in J}$ est un pushout pour $\mathbb{M}$ dans $\mathfrak{K}^{\mathrm{fos}}$.*

(viii) *La projection canonique $\pi_0 : Y_0 \longrightarrow Y_0/H_0$ est propre et peut se prolonger sur Y de façon à obtenir un pushout pour $\mathbb{M}$ dans $\mathfrak{K}^{\mathrm{fos}}$.*

(ix) *Il existe une liaison quasi-finie pour $\mathbb{M}$ dans $\mathfrak{S}$.*

Preuve Il suit du corollaire 3.2.12 que $\mathbb{M}$ est $\mathfrak{S}$-équivalent à un mont $M := (u_j : X \longrightarrow Y_j)_{j\in J}$ dans $\mathfrak{K}^{\mathrm{fos}}$. Par la proposition 3.3.9, $\mathbb{M}$ et M engendrent la même relation d'équivalence et par le lemme 3.3.11, leurs relations d'holonomie sur Y_0 engendrent la même relation d'équivalence.

De plus, toute liaison, respectivement pushout pour $\mathbb{M}$ est une liaison, respectivement un pushout pour M. Nous pouvons donc travailler uniquement sur le mont M. Remarquons encore que la relation R induite par M est ouverte, analytique et finie (théorèmes 3.3.3 et 3.3.4).

La figure 3.7 donne les implications et équivalences que nous allons montrer.

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{(i)} \arrow[rr, Leftrightarrow] \arrow[dl, leftrightarrow] \arrow[dddl, bend right] & & \text{(ii)} \arrow[dr, leftrightarrow] & \\
\text{(iii)} \arrow[dr, leftrightarrow] & & \text{(ix)} \arrow[ul] & & \text{(iv)} \arrow[dl, leftrightarrow] \\
 & \text{(v)} \arrow[ur] \arrow[dl, bend right] & & \text{(vi)} \arrow[dr, bend right] & \\
\text{(vii)} \arrow[ur] \arrow[rrrr] & & & & \text{(viii)} \arrow[ul]
\end{tikzcd}
$$

FIG. 3.7: Structure de la preuve du théorème 3.3.14

(i) $\Rightarrow$ (ii) Évident par le lemme 3.3.11.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Les applications $u_j \times u_{j'}$ étant propres pour tout $j, j' \in J$ ([Bou71, I§10.1, proposition 4]), il suit du lemme 3.3.11 que R^∞ est analytique. Ce lemme implique aussi que pour un compact $K \subset Y$, $R^\infty(K) = \bigcup_{j\in J} u_j u_0^{-1} H_0^\infty\big(u_0 u_j^{-1}(K \cap Y_j)\big)$ est compact. R^∞ est donc une relation d'équivalence propre. En utilisant cette même formule, nous constatons que R^∞ est aussi discrète.

(i) $\Leftrightarrow$ (iii) $\Leftrightarrow$ (v) R est analytique ouverte finie, donc par le théorème 2.2.11, les équivalences sont vérifiées.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iv) $\Leftrightarrow$ (vi) Nous avons $H_0 = (R^2|_{Y_0})$ (lemme 3.3.11). Par les théorèmes 2.1.12 et 2.2.8, $R^2|_{Y_0}$ est une relation analytique ouverte finie et le théorème 2.2.11 nous donne les équivalences à démontrer.

(i), (v) $\Rightarrow$ (vii) Par le théorème 2.1.12, R^∞ est ouverte. π est donc ouverte, finie et surjective, c'est donc un morphisme de $\mathfrak{K}^{\text{fos}}$. Soit $(l_j : Y_j \longrightarrow Z)_{j\in J}$ une liaison pour $\mathbb{M}$ dans $\mathfrak{K}^{\text{fos}}$. L'application $\alpha : Y/R \longrightarrow Z,\ \alpha\big(R^\infty(y)\big) := l_j(y)$ pour $y \in Y_j,\ j \in J$ est bien définie (voir la proposition 3.3.6), est holomorphe et est l'unique application telle que $l_j = \alpha\pi_j$ pour tout $j \in J$. Donc π est un pushout pour $\mathbb{M}$ dans $\mathfrak{K}^{\text{fos}}$.

(vii) $\Rightarrow$ (v) Trivial.

(vi), (vii) $\Rightarrow$ (viii) Nous allons voir que Y/R et Y_0/H_0 sont biholomorphes. L'application $\alpha : Y_0/H_0 \longrightarrow Y/R,\ \alpha\big(H_0^\infty(y)\big) := \pi(y)$ est bien définie (lemme 3.3.11) et holomorphe. Nous avons $\alpha^{-1}\big(R^\infty(y)\big) = R^\infty(y) \cap Y_0$. L'application α^{-1} est bien définie car les arêtes de $\mathbb{M}$ sont surjectives, et est continue car R est ouverte. α est donc un homéomorphisme. D'autre part, Y/R est normal (R^∞ est ouverte et Y est normale, nous pouvons donc appliquer [KK83, 72.4]). Il s'en suit que α est un biholomorphisme ([KK83, 72.2]). $l := \alpha\pi : Y \longrightarrow Y_0/H_0$ est donc un pushout pour $\mathbb{M}$ dans $\mathfrak{K}^{\text{fos}}$.

(viii) $\Rightarrow$ (vi) Trivial.

(v) $\Rightarrow$ (ix) Posons $l_j := \pi|_{Y_j}$ et $(l_j\colon Y_j \longrightarrow Y/R)_{j\in J}$ est une liaison quasi-finie pour M dans $\mathfrak{S}$.

(ix) $\Rightarrow$ (i) Par la proposition 3.3.6, $R^\infty(y)$ est inclu dans $l^{-1}l(y)$ et est donc un ensemble fini pour tout $y \in Y$. Comme R est une relation analytique ouvert finie, il suit alors de [Kau71, 2.2] que R^∞ est une relation d'équivalence analytique finie. $\square$

Dans les deux exemples suivants, nous verrons que le théorème 3.3.14 nous permet de déduire des résultats sur les relations ou sur les groupes d'automorphismes avec un nombre fini de générateurs.

3.3.15 Exemple Soit R une relation analytique ouverte finie définie sur un espace complexe normal connexe Y. La relation R définit le mont M dans $\mathfrak{K}^{\mathrm{fos}}$ de la figure 3.8. La relation d'holonomie de M sur Y_1 est égale à R^2. Si $(l_j\colon Y_j \longrightarrow L)_{j\in\{1,2\}}$ est

$$\begin{tikzcd} & R \arrow[dl, "p_R"'] \arrow[dr, "q_R"] & \\ Y_1 = Y & & Y_2 = Y \end{tikzcd}$$

FIG. 3.8: Mont défini par une relation R

une liaison pour M dans $\mathfrak{S}$, alors pour $y \in Y$, nous avons $l_1(y) = l_1 p_R\big((y,y)\big) = l_2 q_R\big((y,y)\big) = l_2(y)$. De plus, $l_1 = l_2$ doit être R^2-, donc R-, invariante (proposition 3.3.6 et lemme 3.3.11). Les équivalences (ii), (iv), (vi) et (ix) du théorème 3.3.14 nous donnent alors les équivalences suivantes :

(i) R^∞ est une relation d'équivalence analytique finie.

(ii) Il existe un compact $K \subset Y$ qui est R-saturé.

(iii) Y/R est un espace complexe et la projection canonique $Y \to Y/R$ est finie.

(iv) R^∞ est quasi-finie.

3.3.16 Exemple Soit Z un espace complexe normal connexe et $f_1,\dots,f_N$ des automorphismes de Z. Posons $f_0 := \mathrm{Id}_Z$ et $f_{-k} := f_k^{-1}$, $k = 1,\dots,N$ et notons $\langle f_1,\dots,f_N\rangle$ le sous-groupe de $\mathrm{Aut}(Z)$ engendré par $f_1,\dots,f_N$. Les automorphismes $f_1,\dots,f_N$ définissent une relation ouverte analytique finie

$$H := \bigcup_{k=-N}^{N} \Big\{\big(z, f_k(z)\big) : z \in Z\Big\}$$

sur Z. Nous avons alors $(z,z') \in H^\infty$ si et seulement s'il existe $f \in \langle f_1,\dots,f_N\rangle$ avec $z' = f(z)$. Ces automorphismes définissent le mont M dans $\mathfrak{K}^{\mathrm{fos}}$ de la figure 3.9 avec $g_j\big((z,1)\big) := z$ et $g_j\big((z,2)\big) := f_j(z)$ pour $z \in Z$ et $j = 0,\dots,N$. La relation d'holonomie de M sur Y_0 est alors égale à H. Si $(l_j\colon Y_j \longrightarrow L)_{j\in\{1,2\}}$ est une liaison

$$\begin{tikzcd}
 & Z \times \{1,2\} \arrow[dl, "g_0"'] \arrow[d, "g_1"] \arrow[drr, "g_N"] & & \\
Y_0 = Y & Y_1 = Y & \dots & Y_N = Y
\end{tikzcd}$$

FIG. 3.9: Mont défini par les automorphismes $f_1, \dots, f_N$ de Z

pour M dans $\mathfrak{S}$, alors pour $y \in Y$, nous avons $l_0 = \ldots = l_N$ car $g_j\big((z,1)\big) = z$ pour tout $z \in Z$ et pour $j = 0, \dots, N$. De plus, $l_0 = \ldots = l_N$ est $\langle f_1, \dots, f_N \rangle$-invariante (proposition 3.3.6 et lemme 3.3.11). Les équivalences (ii), (iv), (vi) et (ix) du théorème 3.3.14 nous donnent alors les équivalences suivantes :

(i) H^∞ est une relation d'équivalence analytique finie.

(ii) Il existe un compact $K \subset Y$ qui est $\langle f_1, \dots, f_N \rangle$-invariant.

(iii) $Y/\langle f_1, \dots, f_N \rangle$ est un espace complexe et la projection canonique $Y \to Y/\langle f_1, \dots, f_N \rangle$ est finie.

(iv) Pour tout $y \in Y$, l'ensemble $\big\{f(y) : f \in \langle f_1, \dots, f_N \rangle\big\}$ est fini.

De plus, ces énoncés sont équivalents à dire que $\langle f_1, \dots, f_N \rangle$ est un groupe fini : si $\langle f_1, \dots, f_N \rangle$ est un groupe fini, il est clair que $\big\{f(y) : f \in \langle f_1, \dots, f_N \rangle\big\}$ est fini pour tout $y \in Y$; si H^∞ est analytique finie, alors la projection canonique p_{H^∞} est un revêtement analytique (car H^∞ est ouverte, voir [GR84, 7.2.2]) et il existe alors $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Card}\big(H^\infty(y)\big) \leqslant n$ pour tout $y \in Y$ donc $H^\infty = H^n$ et $\mathrm{Card}\big(\langle f_1, \dots, f_N \rangle\big) \leqslant 2(N+1)n$.

3.4 Pushouts dans la catégorie des germes d'espace complexe

3.4.1 Définition *Soit $M_a := (u_{j,a} : X_a \longrightarrow Y_{j,b_j})_{j \in J}$ un mont dans $\mathfrak{K}_{\mathrm{g}}^{\mathrm{do}}$ et $j_0 \in J$. Un représentant $M := (u_j : X \longrightarrow Y_j)_{j \in J}$ est **admissible** par rapport à la vallée Y_{j_0} (ou **j_0-admissible**) s'il satisfait les conditions suivantes :*

(a) *M est un mont dans $\mathfrak{K}^{\mathrm{dos}}$.*

(b) *u_{j_0} est propre et $(u_{j_0})^{-1}(b_{j_0}) = \{a\}$.*

Il n'est en général pas possible de trouver un représentant dont toutes les arêtes sont propres et surjectives. L'exemple suivant en est une illustration.

3.4.2 Exemple Posons $X := (\mathbb{C}^2 \times \{1,2\})/R$, avec

$$R := \Delta_X \cup \Big\{\big((0,0,1),(0,0,2)\big), \big((0,0,2),(0,0,1)\big)\Big\}.$$

X est localement étendable et R analytique, donc par le théorème de Cartan, X est un espace complexe. Soit $Y_1 := Y_2 := \mathbb{C}^2$, $u_1 : X \longrightarrow Y_1$ la projection canonique et $u_2 : X \longrightarrow Y_2$ avec $u_2(x, x', 1) := (x, x')$ et $u_2(x, x', 2) := (x + x', x')$. Le mont $(u_{j,a} : X_a \longrightarrow Y_{j,b_j})_{j\in\{1,2\}}$, avec $a := R\big((0, 0, 1)\big)$ et $b_1 = b_2 = (0, 0)$, ne possède pas de représentant avec un sommet arbitrairement petit dont les deux arêtes sont propres. En effet, un représentant propre de $u_{1,a}$ est de la forme $u_1|_U : U \longrightarrow V$, où V est un voisinage relativement compact de b_1 et $U = (V \times \{1, 2\})/R$ mais $u_2|_U : U \longrightarrow u_2(U)$ n'est pas propre car $u_2(\partial U) \cap u_2(U) \neq \emptyset$.

3.4.3 Théorème et définition *Soit* $M_a := (u_{j,a} : X_a \longrightarrow Y_{j,b_j})_{j\in J}$ *un mont dans* $\mathfrak{K}_{\mathrm{g}}^{\mathrm{do}}$, $j_0 \in J$, $M := (u_j : X \longrightarrow Y_j)_{j\in J}$ *un représentant* j_0*-admissible de* M_a *et* H_{j_0} *la relation d'holonomie de* M *sur* Y_{j_0}. *Le germe de relation* (H_{j_0}, b_{j_0}) *est analytique ouvert discret et indépendant du choix du représentant* j_0*-admissible. Nous appelons ce germe de relation le* ***germe d'holonomie*** *de* M_a *sur la vallée* $Y_{j_0,b_{j_0}}$.

Preuve Sans restriction de la généralité, $j_0 = 0$. L'existence d'un représentant 0-admissible découle de [KK83, 33 B.2]. Le germe d'holonomie de M_a sur Y_{0,b_0} est ouvert discret car les arêtes de M sont ouvertes et discrètes. Ce germe est analytique car comme u_0 est propre, $u_0 \times u_0$ est aussi propre ([Bou71, I§10.1, proposition 4]). Vérifions que la définition du germe d'holonomie ne dépend pas du choix du représentant. Il faut donc montrer que pour tout voisinage U de a, il existe un voisinage W de (b_0, b_0) tel que $(u_0 \times u_0)(R^{u_j}) \cap W = (u_0 \times u_0)\big(R^{u_j} \cap (U \times U)\big) \cap W$ pour tout $j \in J$. L'inclusion "$\supset$" est toujours vérifiée. Supposons que l'autre inclusion ne puisse être vérifiée pour un voisinage U de a. Il existe donc un $j \in J$ et une suite $\big((x_n, y_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $(u_0 \times u_0)(R^{u_j}) \smallsetminus (u_0 \times u_0)\big(R^{u_j} \cap (U \times U)\big)$ qui converge vers (b_0, b_0). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(x'_n, y'_n) \in R^{u_j}$ tel que $(u_0 \times u_0)(x'_n, y'_n) = (x_n, y_n)$. Comme $u_0 \times u_0$ est propre, sans restriction de la généralité, $\big((x'_n, y'_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément de $(u_0 \times u_0)^{-1}(b_0, b_0)$. Comme $u_0^{-1}(b_0) = \{a\}$, $\big((x'_n, y'_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers (a, a) et cette suite est dans $U \times U$ pour n suffisamment grand : une contradiction. □

3.4.4 Lemme *Soit* $M := (u_j : X \longrightarrow Y_j)_{j\in J}$ *un mont dans* $\mathfrak{T}$ *dont les arêtes sont ouvertes et* H_0 *sa relation d'holonomie sur une vallée* Y_0. *Soit* $Y'_0 \Subset Y_0$ *et posons* $X' := u_0^{-1}(Y'_0)$. *La relation d'holonomie de* $M' := \big(u_j|_{X'} : X' \longrightarrow u_j(X')\big)_{j\in J}$ *sur* Y'_0 *est* $H_0|_{Y'_0}$.

Preuve Soit H'_0 l'holonomie de M' sur Y'_0. Il est clair que $H'_0 \subset H_0|_{Y'_0}$. Montrons l'autre inclusion. Soit $(y, y') \in H_0|_{Y'_0}$. Il existe $j \in J$ et $(x, x') \in X$ tels que $(u_0 \times u_0)(x, x') = (y, y')$ et $(x, x') \in R^{u_j}$. Il s'en suit que $(x, x') \in R^{u_j|_{X'}}$ et par conséquent $(y, y') \in H'_0$. □

3.4.5 Théorème *Soit* M_a *un mont dans* $\mathfrak{K}_{\mathrm{g}}^{\mathrm{do}}$ *dont les vallées sont des germes d'espace complexe normal et* (H_{j_0}, b_{j_0}) *le germe d'holonomie de* M_a *sur une de ses vallées* $Y_{j_0,b_{j_0}}$. *Les énoncés suivants sont équivalents :*

(i) $(H_{j_0}, b_{j_0})^\infty$ *est stationnaire.*

(ii) *Il existe un pushout pour* M_a *dans* $\mathfrak{T}_{\mathrm{lc,g}}^{\mathrm{d}}$.

(iii) *Il existe une liaison pour M_a dans $\mathfrak{T}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{lc,g}}$.*

(iv) *Il existe un pushout pour M_a dans $\mathfrak{K}^{\mathrm{do}}_{\mathrm{g}}$.*

(v) *Il existe une liaison pour M_a dans $\mathfrak{K}^{\mathrm{do}}_{\mathrm{g}}$.*

Preuve Sans restriction de la généralité, $j_0 = 0$. La figure 3.10 donne les implications que nous allons démontrer.

$$\begin{tikzcd}
 & & \text{(i)} \arrow[d, shift left] & \\
\text{(v)} \arrow[drr] & & & \text{(ii)} \arrow[dl, shift left] \\
 & \text{(iv)} \arrow[ul] & \text{(iii)} \arrow[l] \arrow[uu, shift left] \arrow[uur, shift left] &
\end{tikzcd}$$

FIG. 3.10: Implications démontrées dans la preuve du théorème 3.4.5

"(i)⇒(iii)" Soit $M' := (u'_j : X' \longrightarrow Y'_j)_{j\in J}$ un représentant 0-admissible de M_a et H'_0 sa relation d'holonomie sur Y'_0. Comme $(H_0, b_0)^\infty$ est stationnaire, par le théorème 2.4.12, il existe un représentant admissible ouvert fini H''_0 de (H_0, b_0) sur $Y''_0 \subset Y'_0$ tel que $(H''_0)^\infty$ soit analytique finie (b_0 possède donc un système fondamental de voisinages H''_0-saturés, voir [KK83, 33 B.4]).
Comme la définition du germe d'holonomie est indépendante du choix du représentant de M_a, il existe un voisinage $Y_0 \subset Y''_0$ de b_0 qui est H''_0-saturé tel que $H'_0|_{Y_0} = H''_0|_{Y_0}$. Posons $X := (u'_0)^{-1}(Y_0)$, $Y_j := u'_j(X)$ et $u_j := u'_j|_X$ pour $j \in J$. L'holonomie de $M := (u_j : X \longrightarrow Y_j)_{j\in J}$ est alors $H'_0|_{Y_0} =: H_0$ (lemme 3.4.4). Comme Y_0 est (H''_0)-saturé, $H_0^\infty = (H''_0|_{Y_0})^\infty = (H''_0)^\infty|_{Y_0}$ est analytique. Notons R la relation induite par M sur $Y := \dot{\bigcup}_{j\in J} Y_j$. Par la remarque 3.3.13, il existe un prolongement $p : Y \longrightarrow Y_0/H_0$ continu discret de la projection canonique $Y_0 \to Y_0/H_0$ tel que $(p|_{Y_j})_{j\in J}$ soit une liaison pour M dans $\mathfrak{T}$ (Y_0/H_0 est même localement compact car H_0^∞ est finie). Donc $(p_{v_j})_{j\in J}$ est une liaison pour M_a dans $\mathfrak{T}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{lc,g}}$.

"(iii)⇒(i), (ii), (iv)" Soit $(l_{j,b_j} : Y'_{j,b_j} \longrightarrow L_c)_{j\in J}$ une liaison pour M_a dans $\mathfrak{T}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{lc,g}}$, $M := (u_j : X \longrightarrow Y_j)_{j\in J}$ un représentant 0-admissible de M_a dont les vallées sont des espaces complexes normaux, avec $R^{u_j}(a) = \{a\}$ pour tout $j \in J$ et soit $(l_j : Y_j \longrightarrow L)_{j\in J}$ un représentant de $(l_{j,b_j})_{j\in J}$ qui est une liaison pour M dans $\mathfrak{T}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{lc}}$. Nous allons construire un représentant de M_a dans $\mathfrak{K}^{\mathrm{fos}}$ de M_a dont les vallées sont des espaces complexes normaux connexes et qui possède une liaison quasi-finie dans $\mathfrak{S}$. Il existe des voisinages Y'_0 de b_0 et L' de c tels que $l_0|_{Y'_0} : Y'_0 \longrightarrow L'$ soit propre ([KK83, 33 B.2]). Posons $X' := u_0^{-1}(Y'_0)$ et $Y'_j := u_j(X')$, $j \in J$. Pour tout $j \in J$ et pour tout $y \in Y'_j$, nous avons $l_j(y) \in L'$: comme il existe $x \in X'$ tel que $u_j(x) = y$, nous avons $l_j(y) = l_j u_j(x) = l_0 u_0(x) \in L'$. Donc $(l'_j := l_j|_{Y'_j} : Y'_j \longrightarrow L')_{j\in J}$ est une liaison pour $M' := (u'_j := u_j|_{X'} : X' \longrightarrow Y'_j)_{j\in J}$. De plus, cette liaison est propre : en effet, pour $j \in J$ et un ensemble $K \subset L'$ compact, $(l'_j)^{-1}(K) = u'_j(u'_0)^{-1}(l'_0)^{-1}(K)$ (lemme 3.3.5) est compact. $(l'_j)_{j\in J}$ est alors une liaison discrète propre, donc quasi-finie. D'autre par M' est un mont dans $\mathfrak{K}^{\mathrm{fos}}$: pour $j \in J$ et un ensemble $K \subset Y'_j$

compact, $(u'_j)^{-1}(K)$ est un sous-ensemble fermé du compact $(u'_0)^{-1}(l'_0)^{-1}l'_j(K)$, donc compact.
Soit X'' la composante connexe de X' contenant l'unique point de $u_0^{-1}(b_0)$. Pour $j \in J$, posons $Y''_j := u_j(X'')$ $\big(Y''_j$ est la composante connexe de Y'_j contenant l'unique point de $u_j u_0^{-1}(b_0)\big)$ et $M'' := (u_j|_{X''} : X'' \longrightarrow Y''_j)_{j\in J}$ est un représentant 0-admissible dans $\mathfrak{K}^{\mathrm{fos}}$ de M_a dont les vallées sont des espaces complexes normaux connexes. $(l_j|_{Y''_j} : Y''_j \longrightarrow L')_{j\in J}$ est une liaison quasi-finie pour M'' dans $\mathfrak{S}$. Il suit du théorème 3.3.14 que $(H''_0)^\infty$ est analytique finie, où H''_0 est la relation d'holonomie de M'' sur Y''_0. Donc $(H''_0, b_0)^\infty$ est stationnaire. D'autre part, le lemme 3.4.7 nous garantit que M_a possède un pushout dans $\mathfrak{K}^{\mathrm{do}}_{\mathrm{g}}$ et dans $\mathfrak{T}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{lc,g}}$.

"(ii)⇒(iii)", "(iv)⇒(v)", "(v)⇒(iii)" Triviales. □

3.4.6 Corollaire *Soit M_a un mont dans $\mathfrak{K}^{\mathrm{do}}_{\mathrm{g}}$ dont les vallées sont des germes d'espace complexe normal. Si M_a satisfait une des équivalences du théorème 3.4.5, alors M_a possède un représentant admissible M dans $\mathfrak{K}^{\mathrm{fos}}$ dont les vallées sont des espaces complexes normaux connexes arbitrairement petit et dont le sommet est connexe et arbitrairement petit. De plus, chaque relation d'holonomie de M définie une relation d'équivalence analytique finie.*

Preuve Voir la preuve de l'implication "(iii)⇒(i), (ii), (iv)" , du théorème 3.4.5. □

3.4.7 Lemme *Soit $M_a := (u_{j,a} : X_a \longrightarrow Y_{j,b_j})_{j\in J}$ un mont dans $\mathfrak{K}^{\mathrm{do}}_{\mathrm{g}}$ dont les vallées sont des germes d'espace complexe normal, $M := (u_j : X \longrightarrow Y_j)_{j\in J}$ un représentant de M_a dans $\mathfrak{K}^{\mathrm{fos}}$ avec $R^{u_j}(a) = \{a\}$ pour tout $j \in J$ et H_0 la relation d'holonomie de M sur une de ses vallées Y_0. Si H_0^∞ est analytique finie, alors M_a possède un pushout dans $\mathfrak{K}^{\mathrm{do}}_{\mathrm{g}}$ et dans $\mathfrak{T}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{lc,g}}$.*

Preuve Notons R la relation induite par M. Par le théorème 3.3.14, R^∞ est analytique finie. Notons $p_j : Y_j \longrightarrow Y/R, Y = \dot{\bigcup}_{j\in J} Y_j$ la projection canonique, $j \in J$. Nous allons voir que $(p_{j,b_j})_{j\in J}$ est un pushout pour M_a dans $\mathfrak{K}^{\mathrm{do}}_{\mathrm{g}}$ et dans $\mathfrak{T}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{lc,g}}$. Soit $(l_{j,b_j} : Y_{j,b_j} \longrightarrow L_c)_{j\in J}$ une liaison pour M_a dans $\mathfrak{K}^{\mathrm{do}}_{\mathrm{g}}$ ou dans $\mathfrak{T}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{lc,g}}$. Pour chaque $j \in J$, il existe un voisinage Y'_j de b_j tel que nous ayons les propriétés suivantes :

(a) $Y' := \dot{\bigcup}_{j\in J} Y'_j$ est R-saturé (possible car R^∞ est finie) et par conséquent $u_0^{-1}(Y'_0) = u_j^{-1}(Y'_j)$ pour tout $j \in J$,

(b) il existe un représentant ouvert discret surjectif $(l_j : Y'_j \longrightarrow L)_{j\in J}$ de $(l_{j,b_j})_{j\in J}$,

(c) $(l_j)_{j\in J}$ est une liaison pour $M' := (u_j|_{X'} : X' \longrightarrow Y'_j)_{j\in J}$, $X' := u_0^{-1}(Y'_0)$.

Nous définissons $\alpha : Y'/(R|_{Y'}) \Subset Y/R \longrightarrow L$, $\alpha\big(R(y)\big) := l_j(y)$ pour $y \in Y'_j$, $j \in J$. L'application α est bien définie $\big($car $(l_j)_{j\in J}$ est R-invariante$\big)$, continue $\big($car R est ouverte$\big)$ et discrète $\big($car $(l_j)_{j\in J}$ est discrète$\big)$. α est donc un morphisme de $\mathfrak{T}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{lc}}$ et si $(l_j)_{j\in J}$ est une liaison dans $\mathfrak{K}^{\mathrm{do}}$, α est même holomorphe et ouverte, donc un morphisme de $\mathfrak{K}^{\mathrm{do}}$. L'application α est l'unique application telle que $\alpha p_j|_{Y'_j} = l_j$

pour tout $j \in J$. Comme la définition du germe $\alpha_{R(b_0)}$ est indépendante du choix des représentants, il s'en suit que $\alpha_{R(b_0)}$ est l'unique germe tel que $\alpha_{R(b_0)} p_{j,b_j} = l_{j,b_j}$. Donc $(p_{j,b_j})_{j\in J}$ est un pushout pour M_a dans $\mathfrak{T}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{lc,g}}$ et dans $\mathfrak{K}^{\mathrm{do}}_{\mathrm{g}}$. $\square$

3.4.8 Exemple Soit Z_a un germe d'espace complexe normal, $f_{0,a}, \ldots, f_{N,a}$ des germes d'automorphismes de Z_a avec $f_{0,a}$ le germe de l'identité. Nous notons $\langle f_{1,a}, \ldots, f_{N,a}\rangle$ le sous-groupe de $\mathrm{Aut}(Z_a)$ engendré par $f_{1,a}, \ldots, f_{N,a}$. Soit $f_j : Z \longrightarrow Z_j$ un représentant de $f_{j,a}$, $j = 0, \ldots, N$. Posons $X := \big(Z \times \{1,2\}\big)/R$, où $R(z,i) := (z,i)$ pour tout $z \in Z \smallsetminus \{a\}$, $i = 1,2$ et $R(a,1) := R(a,2) := \big\{(a,1),(a,2)\big\}$. Comme X est localement étendable et R une relation d'équivalence analytique, il suit donc du théorème de Cartan que X est un espace complexe. Nous définissons dans $\mathfrak{K}^{\mathrm{dos}}$ un mont $M := (u_j : X \longrightarrow Y_j)_{j\in J}$, avec $J := \{0, \ldots, N\}$, $Y_j := Z \cup Z_j$, $u_j|_{Z\times\{1\}} := f_j$ et $u_j|_{Z\times\{2\}} := \mathrm{Id}$. Nous obtenons alors un mont $M_{\tilde a} := (u_{j,\tilde a} : X_{\tilde a} \longrightarrow Y_{j,b_j})_{j\in J}$ dans $\mathfrak{K}^{\mathrm{do}}_{\mathrm{g}}$ dont les vallées sont des germes d'espace complexe normal, où $\tilde a$ est la classe d'équivalence de $(a,1)$ dans X et $b_j := a$ pour tout $j \in J$. Notons (H_0, b_0) le germe d'holonomie de M_a sur Y_{0,b_0}. Nous allons voir que $(H_0,b_0)^\infty$ est stationnaire si et seulement si $\langle f_{1,a}, \ldots, f_{N,a}\rangle$ est un groupe fini.
"$\Rightarrow$" Par le corollaire 3.4.6, il existe un représentant $(u'_j : X' \longrightarrow Y'_j)_{j\in J}$ dans $\mathfrak{K}^{\mathrm{fos}}$ de $M_{\tilde a}$ avec $X' := \Big(\big(Z'_1 \times \{1\}\big) \cup \big(Z'_2 \times \{2\}\big)\Big)/R$ tel que chacune de ses relations d'holonomie définisse une relation d'équivalence analytique finie et tel que $Z'_1, Z'_2, Y'_0, \ldots, Y'_N \Subset Z$ soient des voisinages connexes relativement compacts de a. Comme u'_0 est propre, nous avons $Y'_0 = Z'_1 = Z'_2 =: Z'$. D'autre part, pour tout $j \in J$, u'_j est propre et nous avons $\partial Z' \cup f_j(\partial Z') = u_j(\partial X') \subset Y'_j = \partial\big(Z' \cup f_j(Z')\big)$. Comme Z' est connexe, pour tout $j \in J$, nous devons avoir $f_j(Z') \subset Z'$ $\big($sinon il existerait $z \in \partial\big(Z' \cup f_j(Z')\big) \smallsetminus \partial Z'$ et un chemin $\gamma : [0,1] \longrightarrow Z$ reliant a et z avec $\gamma\big([0,1[\big) \subset f_j(Z')$, ce qui impliquerait l'existence d'un t_0 tel que $\gamma(t_0) \in f_j(Z') \cap \partial Z'$ et donc $\partial Z' \not\subset \partial\big(Z' \cup f_j(Z')\big)$: une contradiction$\big)$. Il suit de la surjectivité de $u'_1, \ldots, u'_N$ que $Y_j = Z'$ pour tout $j \in J$. Nous nous trouvons donc dans l'exemple 3.3.16 et nous pouvons conclure que $\langle f_1|_{Z'}, \ldots, f_N|_{Z'}\rangle$ est un groupe fini. Il s'en suit que $\langle f_{1,a}, \ldots, f_{N,a}\rangle$ est aussi un groupe fini.
"$\Leftarrow$" Si $\mathrm{Card}\langle f_{1,a}, \ldots, f_{n,a}\rangle < \infty$, il suit du lemme 2.3.3, qu'il existe une voisinage $U \Subset Z$ de a tel que $U = f_1(U) = \ldots = f_n(U)$ et tel que $\mathrm{Card}\langle f_1|_U, \ldots, f_n|_U\rangle < \infty$. Il s'en suit que la projection canonique $U \to U/\langle f_1|_U, \ldots, f_n|_U\rangle$ est une liaison (même un pushout) pour $(u_j|_{Z'})_{j\in J}$, $Z' := \big(U \times \{1,2\}\big)/(R|_U)$ dans $\mathfrak{K}^{\mathrm{fos}}$. Par le théorème 3.4.5, $(H_0,b_0)^\infty$ est alors stationnaire.

3.4.9 Définition *Soit $\mathbb{M}$ un massif connexe dans $\mathfrak{K}^{\mathrm{do}}_{\mathrm{g}}$ et (Y_0,b_0) une vallée de $\mathbb{M}$. Un **germe d'holonomie** de $\mathbb{M}$ sur (Y_0,b_0) est le germe d'holonomie d'un mont M_a sur (Y_0,b_0), où M_a est un mont dans $\mathfrak{K}^{\mathrm{do}}_{\mathrm{g}}$ qui est $\mathfrak{T}_{\mathrm{g}}$-équivalent à $\mathbb{M}$ (le corollaire 3.2.15 garantit l'existence d'un tel mont).*

3.4.10 Théorème *(d'après [Egg80, 7.9]) Soit $\mathbb{M}$ un massif connexe dans $\mathfrak{K}^{\mathrm{do}}_{\mathrm{g}}$ dont les vallées sont des germes d'espace complexe normal et (H_0,b_0) un germe d'holonomie de $\mathbb{M}$ sur une de ses vallées (Y_0,b_0). Les énoncés suivants sont équivalents :*

(i) $(H_0, b_0)^\infty$ *est stationnaire.*
(ii) *Il existe un pushout pour* $\mathbb{M}$ *dans* $\mathfrak{T}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{lc,g}}$.
(iii) *Il existe une liaison pour* $\mathbb{M}$ *dans* $\mathfrak{T}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{lc,g}}$.
(iv) *Il existe un pushout pour* $\mathbb{M}$ *dans* $\mathfrak{K}^{\mathrm{do}}_{\mathrm{g}}$.
(v) *Il existe une liaison pour* $\mathbb{M}$ *dans* $\mathfrak{K}^{\mathrm{do}}_{\mathrm{g}}$.

Preuve du théorème 3.4.10 Soit M_a un mont dans $\mathfrak{K}^{\mathrm{do}}_{\mathrm{g}}$ $\mathfrak{T}_{\mathrm{g}}$-équivalent à $\mathbb{M}$ et $(H_0, b_0)^\infty$ son germe d'holonomie sur Y_{0,b_0}. Toute liaison, respectivement tout pushout, pour M_a est une liaison, respectivement un pushout, pour $\mathbb{M}$. Le théorème 3.4.5 nous donne donc les différentes équivalences. □

3.4.11 Corollaire *Soit* $\mathbb{M}$ *un massif connexe dans* $\mathfrak{K}^{\mathrm{do}}_{\mathrm{g}}$ *dont les vallées* $(Y_{j,b_j})_{j\in J}$ *sont des espaces complexes normaux et* (H_{j_0}, b_{j_0}) *un germe d'holonomie de* $\mathbb{M}$ *sur une de ses vallées* $Y_{j_0,b_{j_0}}$. *Si* $(H_{j_0}, b_{j_0})^\infty$ *est stationnaire, alors pour tout* $j \in J$, *et pour tout germe d'holonomie* (H_j, b_j) *sur* Y_{j,b_j}, $(H_j, b_j)^\infty$ *est stationnaire.*

Preuve C'est une conséquence du théorème 3.4.10. □

Chapitre 4

E-feuilletages

Nous commencerons ce chapitre par quelques rappels sur les feuilletages holomorphes. Nous nous attarderons plus particulièrement sur la définition des feuilles et sur leurs topologies. Nous définirons ensuite les E-feuilletages et nous en énoncerons quelques propriétés générales. Nous terminerons ce chapitre en donnant des conditions nécessaires et suffisantes pour que l'espace des feuilles d'un E-feuilletage admette une structure complexe canonique.

4.1 Rappels sur les feuilletages holomorphes

Bohnhorst et Reiffen développent dans [BR85] une théorie générale des feuilletages holomorphes définis sur des espaces complexes réduits. Reiffen donne dans [Rei87], une définition précise des feuilles d'un tel feuilletage. Nous rappelons dans cette section les principaux résultats de ces deux papiers.

4.1.1 Définitions

(i) *Un* ***feuilletage holomorphe régulier*** *de dimension p sur une variété complexe X de dimension n est une relation d'équivalence $R^{\mathbb{F}}$ sur X avec les propriétés suivantes :*

   (a) Chaque classe d'équivalence L de $R^{\mathbb{F}}$, appelée ***feuille****, a la structure d'une variété complexe connexe de dimension p telle que l'injection canonique $L \hookrightarrow X$ soit une immersion.*

   (b) Tout point de X possède un voisinage U sur lequel est défini une submersion $f : U \longrightarrow V \Subset \mathbb{C}^{n-p}$ telle que les ensembles de niveau de f coïncident avec les composantes connexes des classes d'équivalence de $R^{\mathbb{F}}|_U$.

(ii) *Un* ***feuilletage holomorphe*** *sur un espace complexe X est une paire $(A, \mathbb{F}_A)$, où $A \subset X$ est un ensemble analytique nulle part dense dans X avec $\operatorname{Sing} X \subset A$ et $\mathbb{F}_A$ un feuilletage holomorphe régulier sur $X \smallsetminus A$.*

(iii) *Deux feuilletages holomorphes* $(A, \mathbb{F}_A), (B, \mathbb{F}_B)$ *sur un espace complexe* X *sont équivalents si* $\mathbb{F}_A|_{X \setminus (A \cup B)} = \mathbb{F}_B|_{X \setminus (A \cup B)}$.

4.1.2 Remarque Dans la suite de ce travail, lorsque nous parlerons de feuilletage holomorphe, nous sous-entendrons qu'il s'agit d'une classe d'équivalence de feuilletages holomorphes.

4.1.3 Proposition et définition *Si* $\mathbb{F}$ *est un feuilletage holomorphe sur un espace complexe* X*, alors* $\mathbb{F}$ *possède un représentant* $(A, \mathbb{F}_A)$ *avec* A *minimal.* A *s'appelle l'**ensemble des singularités de*** $\mathbb{F}$ *et nous le notons* $\operatorname{Sing}\mathbb{F}$*. Nous définissons encore* $X^{\mathrm{reg}} := X \setminus \operatorname{Sing}\mathbb{F}$*, la **partie régulière de*** $\mathbb{F}$.

Preuve Il suffit de poser $\operatorname{Sing}\mathbb{F} := \bigcap_{(A, \mathbb{F}_A) \in \mathbb{F}} A$. □

4.1.4 Définition *Soit* $\mathbb{F}$ *un feuilletage holomorphe sur un espace complexe* X*. Pour chaque composante irréductible* X' *de* X *la **dimension de*** $\mathbb{F}$ ***sur*** $\boldsymbol{X'}$*, notée* $\dim_{X'} \mathbb{F}$*, est la dimension du feuilletage régulier* $\mathbb{F}|_{X' \setminus \operatorname{Sing}\mathbb{F}}$*. Si* X *est irréductible, la dimension de* $\mathbb{F}$ *est* $\dim \mathbb{F} := \dim_X \mathbb{F}$.

Si $\mathbb{F}$ est un feuilletage holomorphe sur un espace complexe X, $\mathbb{F}|_{X^{\mathrm{reg}}}$ induit un faisceau de formes différentielles $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}$ induit un sous-fibré T de l'espace tangent à X^{reg}. Nous définissons les faisceaux $\Omega^{\mathbb{F}}$ et $\mathcal{O}^{\mathbb{F}}$ de la façon suivante :

Pour $U \Subset X$

$$\Omega^{\mathbb{F}}(U) := \{\omega \in {}_X\Omega(U) : \langle \omega(x), \theta \rangle = 0 \ \forall \theta \in T_x, \ \forall x \in U \setminus \operatorname{Sing}\mathbb{F}\},$$

$$\mathcal{O}^{\mathbb{F}}(U) := \{f \in {}_X\mathcal{O}(U) : \mathrm{d}f_x \in \Omega^{\mathbb{F}}_x \ \forall x \in U\}.$$

$\mathcal{O}^{\mathbb{F}}$ est le ***faisceau des primitives de*** $\mathbb{F}$.

4.1.5 Définition *Un feuilletage* $\mathbb{F}$ *sur un espace complexe* X *est **cohérent** si le faisceau* $\Omega^{\mathbb{F}}$ *est cohérent.*

4.1.6 Théorème *(*BOHNHORST-REIFFEN*) Il y a une bijection entre l'ensemble des feuilletages holomorphes cohérents sur* X *et l'ensemble des sous-faisceaux cohérents complets involutifs de* ${}_X\Omega$.

Pour une preuve voir [BR85, 5.9].

4.1.7 Théorème *Soit* $\mathbb{F}, \mathbb{F}'$ *des feuilletages holomorphes cohérents sur un espace complexe* X*. S'il existe un ouvert* $U \Subset X$ *qui intersecte chaque composante irréductible de* X *et tel que* $\mathbb{F}|_U = \mathbb{F}'|_U$*, alors* $\mathbb{F} = \mathbb{F}'$.

Preuve Comme $\Omega^{\mathbb{F}}|_{U \setminus \operatorname{Sing} X} = \Omega^{\mathbb{F}'}|_{U \setminus \operatorname{Sing} X}$, il suit de [Rei97, 1.19] que $\Omega^{\mathbb{F}}|_{X \setminus \operatorname{Sing} X} = \Omega^{\mathbb{F}'}|_{X \setminus \operatorname{Sing} X}$. Donc $\mathbb{F}|_{X \setminus \operatorname{Sing} X} = \mathbb{F}'|_{X \setminus \operatorname{Sing} X}$, ce qui signifie, par définition, que $\mathbb{F} = \mathbb{F}'$. □

Jusqu'à la fin de cette section, $\mathbb{F}$ sera un feuilletage holomorphe cohérent sur un espace complexe normal connexe X.

4.1.8 Définition *Soit $f : U \longrightarrow Z$, $U \Subset X$, une application holomorphe. f est* ***$\mathbb{F}$-invariante*** *si $f^*{}_Z\Omega$ est un sous-faisceau de $\Omega^{\mathbb{F}}|_U$. L'application f est une* ***préintégrale*** *de $\mathbb{F}$ si $\widetilde{f^*{}_Z\Omega} = \Omega^{\mathbb{F}}|_U$. L'application f est une* ***intégrale*** *de $\mathbb{F}$ si Z est irréductible et si f est une préintégrale génériquement ouverte*[1].

Nous allons maintenant définir les feuilles de $\mathbb{F}$.

4.1.9 Définition *Soit Y un espace complexe et $\phi : Y \longrightarrow X$ une application holomorphe. ϕ est une* ***immersion holomorphe*** *si pour tout $y \in Y$, il existe un voisinage $U \Subset Y$ de y et $V \Subset X$ de $\phi(y)$ tel que $\phi(U)$ est un sous-ensemble analytique de V et tel que $\phi|_U : U \longrightarrow \phi(U)$ est biholomorphe.*

4.1.10 Remarque Soit $\phi_z : Z_z \longrightarrow X_x$ un germe d'immersion holomorphe. Nous définissons le germe d'espace complexe $\phi_z(Z_z)$ à l'aide d'un représentant $\phi : Z \longrightarrow U$ tel que $\phi(Z)$ soit analytique dans U et tel que $\phi : Z \longrightarrow \phi(Z)$ soit biholomorphe. Nous posons alors $\phi_z(Z_z) := \big(\phi(Z)\big)_{\phi(z)}$ et ce germe est indépendant du choix du représentant.

4.1.11 Définition *Soit Y un espace complexe connexe et $\phi : Y \longrightarrow X$ une immersion holomorphe. ϕ est une* ***variété intégrale de*** *$\mathbb{F}$ si pour tout $y \in Y$ et pour tout $f_{\phi(y)} \in \mathcal{O}^{\mathbb{F}}_{\phi(y)}$, le germe $f_{\phi(y)} \circ \phi_y$ est le germe d'une application constante.*

4.1.12 Définition *Une variété intégrale $\phi : Y \longrightarrow X$ de $\mathbb{F}$ est* ***grande*** *si $\dim_y Y \geqslant \dim \mathbb{F}$ pour tout $y \in Y$. Une grande variété intégrale de $\mathbb{F}$ est* ***localement maximale*** *si pour tout $y \in Y$ et pour tout germe $\psi_z : Z_z \longrightarrow X_{\phi(y)}$ de grande variété intégrale de $\mathbb{F}$ nous avons $\psi_z(Z_z) \subset \phi_y(Y_y)$.*

4.1.13 Définition *Soit $U \Subset X$ et Y un sous-ensemble analytique connexe de U. L'ensemble Y est une* ***feuille locale*** *de $\mathbb{F}$ si l'inclusion $Y \to X$ est une variété intégrale localement maximale de $\mathbb{F}$. Un point $x \in X$ est un $\mathbb{F}$-point s'il existe une feuille locale contenant x. Nous noterons X^ρ l'ensemble de $\mathbb{F}$-points de X.*

4.1.14 Définitions et proposition *L'ensemble des feuilles locales de $\mathbb{F}$ est la base d'une topologie $\mathcal{T}_l$ sur X^ρ appelée* ***topologie feuille****. Les composantes connexes $(X^\rho, \mathcal{T}_l)$ sont les* ***feuilles*** *de $\mathbb{F}$. Si $X^\rho = X$, on dira que $\mathbb{F}$ a des feuilles partout.*

Preuve Soit L_1, L_2 des feuilles locales et $x \in L_1 \cap L_2$. Comme L_1 et L_2 sont des variétés intégrales localement maximales, nous avons $L_{1,x} = L_{2,x}$ et il existe un voisinage $U \Subset X$ de x tel que $L_1 \cap U = L_2 \cap U$. Il s'en suit que $L_1 \cap L_2$ est une réunion de feuilles locales. L'ensemble des feuilles locales est donc la base d'une topologie $\mathcal{T}_l$. $\square$

[1] Une application holomorphe $f : X \longrightarrow Y$ est génériquement ouverte s'il existe un ensemble analytique $A \subset X$ nulle part dense dans X tel que $f|_{X \setminus A}$ est ouverte.

4.1.15 Notations Si $\mathbb{F}$ a des feuilles partout, nous notons $R^{\mathbb{F}}$ la relation d'équivalence définie sur X par les feuilles de $\mathbb{F}$ et $\pi : X \longrightarrow X/\mathbb{F} := X/R^{\mathbb{F}}$ la projection canonique sur l'espace des feuilles.

4.1.16 Remarques et notations Chaque feuille a deux topologies : la topologie feuille $\mathcal{T}_l$ et la topologie $\mathcal{T}_i$ induite par X. Pour une feuille L de $\mathbb{F}$, l'identité $(L, \mathcal{T}_l) \to (L, \mathcal{T}_i)$ est continue mais n'est en général pas un homéomorphisme.

4.1.17 Proposition *Si L est une feuille de $\mathbb{F}$, alors $(L, \mathcal{T}_l)$ est un espace complexe et l'injection canonique $(L, \mathcal{T}_l) \to X$ est une variété intégrale localement maximale de $\mathbb{F}$.*

Preuve Soit $x \in L$ et A une feuille locale contenant x. Par définition de la topologie feuille, nous avons $A \in \mathcal{T}_l$ et il existe un ouvert $U \Subset X$ tel que A soit analytique dans U. Donc $(L, \mathcal{T}_l)$ est un espace complexe.
L'injection $(L, \mathcal{T}_l) \to X$ est une variété intégrale localement maximale car L est une réunion de feuilles locales, donc une réunion de variétés intégrales localement maximales. □

4.1.18 Lemme *Soit $U \Subset X$. Pour toute primitive, $\phi \in \mathcal{O}^{\mathbb{F}}(U)$, ϕ est constante sur les feuilles de $\mathbb{F}|_U$.*

Preuve Soit $U \Subset X$, $\phi \in \mathcal{O}^{\mathbb{F}}(U)$ et L une feuille de $\mathbb{F}|_U$. Nous avons $\mathcal{O}^{\mathbb{F}}(U) = \mathcal{O}^{\mathbb{F}|_U}(U)$. Comme $(L, \mathcal{T}_l)$ est une variété intégrale de $\mathbb{F}|_U$, l'application ϕ est constante sur L. □

4.1.19 Lemme *Si $\phi : Y \longrightarrow X$ est une variété intégrale de $\mathbb{F}$ et $f : U \longrightarrow V$ une application holomorphe $\mathbb{F}$-invariante avec* Im $\phi \subset U$, *alors $f \circ \phi$ est constante.*

Preuve Y étant connexe, il suffit de montrer que $f \circ \phi$ est localement constante. Donc, sans restriction de la généralité, nous pouvons supposer $V \subset \mathbb{C}^n$ et donc que $f = (f_1, \ldots, f_n)$. Comme $f^*{}_Z\Omega \subset \Omega^{\mathbb{F}}$, nous avons $\mathrm{d}f_i \in \Omega^{\mathbb{F}}(U)$, c'est-à-dire $f_i \in \mathcal{O}^{\mathbb{F}}(U)$. Par définition d'une variété intégrale, $f_i \circ \phi$ est alors constante, $i = 1, \ldots, n$. □

4.1.20 Lemme *Si $f : U \longrightarrow V$ est une application holomorphe ouverte avec U un espace complexe normal, alors U/R^f est un espace complexe normal et f a les mêmes fibres que la projection canonique $U \to U/R^f$.*

Preuve R^f étant une relation d'équivalence analytique ouverte sur un espace complexe normal, il suit de [BR90] que U/R^f est un espace complexe normal. □

4.1.21 Proposition *Si $f : U \longrightarrow Z$, $U \Subset X$ est une intégrale ouverte de $\mathbb{F}$, alors les ensembles de niveau de f sont des feuilles locales de $\mathbb{F}$.*

Preuve Sans restriction de la généralité, par le lemme 4.1.20, nous pouvons supposer que Z est normal et que f est surjective. Soit L un ensemble de niveau de f et notons $i : L \longrightarrow U$ l'injection canonique. Par [BR85, 6.9], pour tout $U' \Subset U$ et pour tout $\phi \in \mathcal{O}^{\mathbb{F}}(U')$, l'application ϕ est constante sur les ensembles de niveau de $f|_{U'}$. L'application i est donc une variété intégrale de $\mathbb{F}$. Comme U et Z sont normaux et f ouverte, les fibres de f sont toutes de dimension pure $\dim U - \dim Z$ (voir [KK83, 49.16]. Puisque $(\widetilde{f^*{}_Z\Omega})|_{U \setminus \operatorname{Sing} \mathbb{F}} = \Omega^{\mathbb{F}}|_{U \setminus \operatorname{Sing} \mathbb{F}}$, les fibres de f sont donc de dimension $\dim \mathbb{F}$ et i est donc une grande variété intégrale.
Soit $a \in L$ et $\phi_y : Y_y \longrightarrow X_a$ un germe de grande variété intégrale de $\mathbb{F}$. Il existe un représentant $\phi : Y \longrightarrow X$ qui est une variété intégrale et un voisinage $U' \Subset U$ de a tel que $\phi(Y)$ soit analytique dans U' et tel que $\phi : Y \longrightarrow \phi(Y)$ soit biholomorphe. Comme f est une intégrale de $\mathbb{F}$, f est $\mathbb{F}$-invariante et par le lemme 4.1.19, $f \circ \phi$ est une application constante. Donc $\phi(Y) \subset L$ et L est une variété intégrale localement maximale, c'est-à-dire une feuille locale. □

4.1.22 Exemple Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application holomorphe ouverte surjective. $f^*{}_Y\Omega$ est un faisceau cohérent (car $f^*{}_X\Omega$ est un sous-module de type fini de ${}_X\Omega$) et par conséquent le faisceau $\widetilde{f^*{}_Y\Omega}$ est aussi cohérent. $\widetilde{f^*{}_Y\Omega}$ est involutif car $(\widetilde{f^*{}_Y\Omega})|_{X \setminus \operatorname{Sing} X}$ est involutif (voir [Rei97, 3.14-3.16]). $\widetilde{f^*{}_Y\Omega}$ définit donc un feuilletage holomorphe cohérent que nous notons $\mathbb{F}^f$ et nous avons $\Omega^{\mathbb{F}^f} = \widetilde{f^*{}_Y\Omega}$. L'application f est une intégrale de $\mathbb{F}^f$ et il suit de la proposition 4.1.21 que les ensembles de niveau de f sont des feuilles de $\mathbb{F}^f$.

4.1.23 Proposition *Soit L une feuille de $\mathbb{F}$. Si X a une topologie dénombrable, alors $(L, \mathcal{T}_l)$ a aussi une topologie dénombrable.*

Pour démontrer cette proposition, nous allons utiliser le théorème suivant qui est une conséquence du théorème de Poincaré-Volterra :

4.1.24 Théorème *Soit U un espace topologique connexe localement connexe, V un espace topologique régulier*[2] *à topologie dénombrable et $f : U \longrightarrow V$ une application continue. Si pour pour tout point $x \in U$, il existe un voisinage fermé $A \subset U$ de x tel que $f(A)$ soit fermé et tel que la restriction $f|_A : A \longrightarrow f(A)$ soit un homéomorphisme alors U est un espace régulier à topologie dénombrable.*

Pour une preuve voir [Bou71, I§11.7, corollaire 1].

Preuve de 4.1.23 $(L, \mathcal{T}_i)$ est un espace topologique régulier à topologie dénombrable car X est un espace topologique régulier à topologie dénombrable. $(L, \mathcal{T}_l)$ est connexe localement connexe. De plus, pour tout $x \in L$, il existe un $\mathcal{T}_l$-voisinage A de

[2]Un espace topologique V est T_3 (ou régulier) s'il est T_1 (c'est-à-dire , si pour tout $x_1, x_2 \in V$, il existe un voisinage ouvert $U \subset V$ de $x_1 \in U$ et $x_2 \notin U$) et si pour tout $x \in V$ et pour tout $F \subset V$ fermé avec $x \notin F$, il existe des ouverts $U_1, U_2 \subset T$ avec $F \subset U_1,\ x \in U_2$ et $U_{12} = \emptyset$. Un espace topologique localement compact, et par conséquent un espace complexe, est régulier.

x qui est $\mathcal{T}_l$- et $\mathcal{T}_i$-fermé tel que l'identité $(A, \mathcal{T}_l) \to (A, \mathcal{T}_i)$ soit un homéomorphisme. Il suit donc du théorème 4.1.24 que $(L, \mathcal{T}_l)$ a aussi une topologie dénombrable. $\square$

4.1.25 Lemme *Si L est une feuille de $\mathbb{F}$, alors $(L, \mathcal{T}_l)$ et $(L, \mathcal{T}_i)$ sont connexes par arc.*

Preuve Comme $(L, \mathcal{T}_l)$ est un espace complexe connexe, $(L, \mathcal{T}_l)$ est connexe par arc (voir [GR84, 9§3.2]). L'identité $(L, \mathcal{T}_l) \to (L, \mathcal{T}_i)$ étant continue, $(L, \mathcal{T}_i)$ est alors aussi connexe par arc. $\square$

4.2 Définition d'un E-feuilletage et quelques propriétés

Dans toute cette section, nous travaillerons avec un espace complexe normal connexe X qui a une topologie dénombrable et un feuilletage holomorphe cohérent $\mathbb{F}$ sur X avec des feuilles partout.

4.2.1 Définition *Une application holomorphe ouverte surjective $f : U \longrightarrow V$, $U \Subset X$ est une $\mathbb{F}$-**carte** si elle a des fibres de dimension* $\dim \mathbb{F}$ *et s'il existe une application $b : V \longrightarrow X/\mathbb{F}$ telle que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi|_U"'] & V \arrow[dl, "b"] \\ X/\mathbb{F} & \end{tikzcd}$$

*f sépare donc les feuilles. L'application b est appelée **application feuille**. Le feuilletage $\mathbb{F}$ est un **E-feuilletage** si pour tout $x \in X$, il existe une $\mathbb{F}$-carte définie sur un voisinage de x.*

4.2.2 Remarques Soit $f : U \longrightarrow V$, $U \Subset X$ est une $\mathbb{F}$-carte et $b : V \longrightarrow X/\mathbb{F}$ son application feuille.

(i) Comme X est localement irréductible et f ouverte, V doit aussi être localement irréductible. Nous pouvons par conséquent supposer que V est normal et il s'en suit que les fibres de f sont de dimension pure.

(ii) Pour tout $U' \Subset U$, l'application $f|_{U'} : U' \longrightarrow f(U')$ est aussi une $\mathbb{F}$-carte.

(iii) Si C est une fibre de f, il existe alors une feuille L de $\mathbb{F}$ telle que $C \subset L$ car $\pi(C) = bf(C)$ est constitué d'un seul point.

(iv) f est une intégrale (preuve dans le paragraphe suivant).

(v) Si $g : U \longrightarrow V$ est une intégrale ouverte surjective simple de $\mathbb{F}$, alors g est une $\mathbb{F}$-carte (c'est une conséquence de la proposition 4.1.21).

(vi) Si X est une variété complexe et $\mathbb{F}$ un feuilletage localement intégrable de codimension 1, alors $\mathbb{F}$ est un E-feuilletage (c'est une conséquence de la remarque (v) et de [Rei82]).

(vii) Tout H-feuilletage et en particulier tout feuilletage régulier est un E-feuilletage. Cependant le feuilletage $\mathbb{F}^f$ défini sur $\mathbb{C}^2$ par l'application ouverte $f : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$, $f(z_1, z_2) := z_1^k z_2^l$ avec $k, l \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux, est un E-feuilletage (car f est une $\mathbb{F}^f$-carte) mais pas un H-feuilletage (voir [Rei97, 5.13]).

Preuve de la remarque (iv) Supposons d'abord que U et V sont des variétés et que $U \cap \operatorname{Sing} \mathbb{F} = \emptyset$. Par le théorème du rang pour les applications différentiables, l'ensemble

$$A := \{x \in U : \operatorname{rang} \mathrm{d}_x f < \dim V\}$$

est analytique et nulle part dense dans U. L'ensemble $\widetilde{U} := U \setminus A$ est donc un ouvert dense dans U et l'application $f|_{\widetilde{U}} : \widetilde{U} \longrightarrow V$ est une submersion. Elle définit un feuilletage holomorphe régulier $\widetilde{\mathbb{F}}$ sur $\widetilde{U}$. Nous allons voir que $\widetilde{\mathbb{F}}$ et $\mathbb{F}|_{\widetilde{U}}$ ont les mêmes feuilles. Par la remarque 4.2.2(iii), toute feuille de $\widetilde{\mathbb{F}}$ est inclue dans une feuille de $\mathbb{F}|_{\widetilde{U}}$. Soit $\widetilde{L}$ une feuille de $\widetilde{\mathbb{F}}$ et L une feuille de $\mathbb{F}|_{\widetilde{U}}$. Comme $\widetilde{L} \subset L$, l'ensemble $(\widetilde{L}, \mathcal{T}_l)$ est un sous-ensemble localement analytique régulier (c'est-à-dire sans singularité) de $(L, \mathcal{T}_l)$ de même dimension, donc un ouvert connexe de $(L, \mathcal{T}_l)$. Comme nous pouvons recouvrir L avec des feuilles de $\widetilde{\mathbb{F}}$, il s'en suit que $(\widetilde{L}, \mathcal{T}_l)$ est une composante connexe de L et par conséquent $L = \widetilde{L}$. Il s'en suit que $\widetilde{\mathbb{F}} = \mathbb{F}|_{\widetilde{U}}$, $(f^*{}_V\Omega)|_{\widetilde{U}} = \Omega^{\mathbb{F}}|_{\widetilde{U}}$ et $\widetilde{f^*{}_V\Omega} = \Omega^{\mathbb{F}}|_U$. L'application f est donc une intégrale.
Pour le cas général, nous posons $\widetilde{U} := U \setminus A$ avec $A := \big(\operatorname{Sing} \mathbb{F} \cup \operatorname{Sing} U \cup f^{-1}(\operatorname{Sing} V)\big)$. Il suit de la première partie de la preuve que $(\widetilde{f^*{}_V\Omega})|_{\widetilde{U}} = \Omega^{\mathbb{F}}|_{\widetilde{U}}$. Comme A est analytique et nulle part dense dans U, nous avons $\widetilde{f^*{}_V\Omega} = \Omega^{\mathbb{F}}|_U$. et l'application f est donc une intégrale. □

4.2.3 Théorème *Si $\mathbb{F}$ est un E-feuilletage et $f : U \longrightarrow V$ une $\mathbb{F}$-carte, alors les ensembles de niveau de f sont des feuilles de $\mathbb{F}|_U$, donc $C_x\big(f^{-1}f(x)\big) = C_x\big(R^{\mathbb{F}}(x) \cap U, \mathcal{T}_l\big)$ pour tout $x \in U$.*

Preuve C'est une conséquence de la proposition 4.1.21 remarque 4.2.2(iv). □

4.2.4 Corollaire *Si $f_i : U \longrightarrow V_i,\ i = 1, 2$ sont des $\mathbb{F}$-cartes, alors f_1 et f_2 ont les mêmes ensembles de niveau.*

Preuve Par le théorème 4.2.3, nous avons $C_x\big(f_1^{-1}f_1(x)\big) = C_x\big(R^{\mathbb{F}}(x) \cap U, \mathcal{T}_l\big) = C_x\big(f_2^{-1}f_2(x)\big)$ pour tout $x \in U$. □

4.2.5 Proposition *Si $\mathbb{F}$ est un E-feuilletage, la relation d'équivalence $R^{\mathbb{F}}$ est ouverte.*

Preuve Nous devons démontrer que pour tout $x \in X$, pour tout $y \in R^{\mathbb{F}}(x)$ et pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers x, il existe une suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers

y telle que $y_n \in R(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (corollaire 2.1.14). Il faut donc montrer que $R^{\mathbb{F}}(x) = R(x)$, où

$$R(x) := \{y \in R^{\mathbb{F}}(x) : \text{pour toute suite } x_n \to x \text{ il existe une suite } R^{\mathbb{F}}(x_n) \ni y_n \to y\}.$$

Comme

$$R^{\mathbb{F}}(x) \smallsetminus R(x) = \{y \in R^{\mathbb{F}}(x) : \exists x_n \to x \text{ et } y \in U \Subset X \text{ tels que } R(x_n) \cap U = \emptyset \ \forall n\}$$

est $\mathcal{T}_i$-ouvert dans $R^{\mathbb{F}}(x)$, $R^{\mathbb{F}}(x) \smallsetminus R(x)$ est aussi $\mathcal{T}_l$-ouvert dans $R^{\mathbb{F}}(x)$ et donc $R(x)$ est $\mathcal{T}_l$-fermé dans $R^{\mathbb{F}}(x)$. Comme $R^{\mathbb{F}}(x)$ est $\mathcal{T}_l$-connexe, il reste à démontrer que $R(x)$ est $\mathcal{T}_l$-ouvert. Soit $a \in R(x)$ et $f : U \longrightarrow V$ une $\mathbb{F}$-carte avec $a \in U$. L'ensemble $A := C_a\big(R^f(a)\big) \subset R^{\mathbb{F}}(a) = R^{\mathbb{F}}(x)$ est un $\mathcal{T}_l$-voisinage de a dans $R^{\mathbb{F}}(x)$. Nous allons montrer que $A \subset R(x)$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers x. Comme $a \in R(x)$, il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers a telle que $a_n \in R^{\mathbb{F}}(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme R^f est ouverte, par le corollaire 2.1.14 pour tout $b \in A$ il existe une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $b_n \in R^f(a_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme f sépare les feuilles, $f(a_n) = f(b_n)$ implique $R^{\mathbb{F}}(a_n) = R^{\mathbb{F}}(b_n)$. Nous avons donc $b_n \in R^{\mathbb{F}}(a_n) = R^{\mathbb{F}}(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $b \in R(x)$. □

4.2.6 Remarque Si $f : U \longrightarrow V$ est une $\mathbb{F}$-carte, alors son application feuille $b : V \longrightarrow X/\mathbb{F}$ est ouverte et continue (car $R^{\mathbb{F}}$ est ouverte et f est ouverte continue et surjective).

4.2.7 Lemme *([Egg80, 8.4]) Soit $f_j : U_j \longrightarrow V_j$, $j = 1, 2$ des $\mathbb{F}$-cartes avec $U_{12} \neq \emptyset$. Il existe une $\mathbb{F}$-carte $\beta_{12} : U_{12} \longrightarrow Z$ et des applications $u_j : Z \longrightarrow V_j$, $j = 1, 2$ holomorphes ouvertes discrètes telles que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} & U_{12} \arrow[dl, "f_1|_{U_{12}}"'] \arrow[d, "\beta_{12}"] \arrow[dr, "f_2|_{U_{12}}"] & \\ V_1 & Z \arrow[l, "u_1"'] \arrow[r, "u_2"] & V_2 \end{tikzcd}$$

Pour démontrer ce lemme, nous allons utiliser le théorème suivant :

4.2.8 Théorème (Kaup) *Si $f : U \longrightarrow V$ est une application holomorphe ouverte entre deux espaces complexes normaux avec une topologie dénombrable, alors il existe une application holomorphe ouverte surjective $\beta : U \longrightarrow Z$ (appelée la* ***base complexe*** *de f) sur un espace complexe normal Z avec les propriétés suivantes :*

(a) *β est constante sur les ensembles de niveau de f et il existe une unique application holomorphe $f' : Z \longrightarrow V$ telle que $f = f'\beta$.*

(b) *Si $g : U \longrightarrow W$ est une application holomorphe qui est constante sur les ensembles de niveau de f, alors il existe une unique application holomorphe $g' : Z \longrightarrow W$ telle que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} U \arrow[d, "\beta"'] \arrow[dr, "g"] & \\ Z \arrow[r, "g'"] & W \end{tikzcd}$$

Pour une preuve, voir [Kau75, 1.2].

4.2.9 Remarques

(i) Les propriétés de la base complexe β d'une application f implique que β et f ont les mêmes ensembles de niveau.

(ii) Soit $f : U \longrightarrow V$ une application holomorphe ouverte entre deux espaces complexes normaux et $\beta : U \longrightarrow Z$ sa base complexe. L'application $f' : Z \longrightarrow V$ telle que $f'\beta = f$ est ouverte car f est ouverte et β est continue est surjective. Il s'en suit que comme f et β ont les mêmes ensembles de niveau, nous avons $\dim V = \dim Z$ et f' est alors discrète (voir [KK83, 49.16]).

(iii) La base complexe d'une $\mathbb{F}$-carte est elle-même une $\mathbb{F}$-carte.

(iv) Si $f_i : U \longrightarrow V_i,\ i = 1, 2$ sont deux applications holomorphes ouvertes entre des espaces complexes normaux avec une topologie dénombrable et si ces deux applications ont les mêmes ensembles de niveau, alors f_1 et f_2 ont la même base complexe.

Preuve †† de 4.2.7 Les applications $f_i|_{U_{12}},\ i = 1, 2$ ont les mêmes ensembles de niveau (corollaire 4.2.4) et par conséquent la même base complexe $\beta_{12} : U_{12} \longrightarrow Z$. Il existe donc des applications $u_j : Z \longrightarrow V_j,\ j = 1, 2$ holomorphes ouvertes discrètes telles que le diagramme suivant commute $\big($voir la remarque 4.2.9(ii)$\big)$:

$$\begin{tikzcd} & U_{12} \arrow[dl, "f_1|_{U_{12}}"'] \arrow[d, "\beta_{12}"] \arrow[dr, "f_2|_{U_{12}}"] & \\ V_1 & Z \arrow[l, "u_1"'] \arrow[r, "u_2"] & V_2 \end{tikzcd}$$

□

4.2.10 Lemme *Si $\mathbb{F}$ est un E-feuilletage, $f : U \longrightarrow V$ une $\mathbb{F}$-carte et $b : V \longrightarrow X/\mathbb{F}$ son application feuille, alors R^b a les propriétés suivantes :*

(a) *R^b est très faiblement analytique.*

(b) *([Egg80, 9.1]) Pour tout $y \in V$, soit $R^b(y)$ est discret, soit $R^b(y)$ ne possède pas de point isolé.*

(c) *([Egg80, 9.1]) Si pour $x \in U$, $R^{\mathbb{F}}(x)$ est fermé dans X, alors $R^b\big(f(x)\big)$ est discret.*

Preuve † Nous allons d'abord construire un massif pour montrer que R^b est très faiblement analytique et ensuite l'utiliser pour démontrer l'affirmation (b).

Ad (a)**.** Soit $(y, y') \in R^b$. Si $y = y'$, alors Δ_V est un ensemble localement analytique qui a la propriété voulue. Considérons donc le cas où $y \neq y'$. Il existe $x, x' \in U$ avec $f(x) = y$ et $f(x') = y'$. Les points x et x' sont dans la même feuille car $\pi(x) = bf(x) = b(y) = b(y') = bf(x') = \pi(x')$. Comme $R^{\mathbb{F}}(x)$ est $\mathcal{T}_i$-connexe par arc (proposition 4.1.25), il existe un chemin continu injectif $\gamma : [0, 1] \longrightarrow R^{\mathbb{F}}(x)$ reliant x

et x'. Pour tout $t \in [0,1]$, il existe un voisinage $U(t)$ de $\gamma(t)$ tel que $\gamma\big([0,1]\big) \cap U(t)$ soit connexe et tel qu'il existe une $\mathbb{F}$-carte $f(t)\colon U(t) \longrightarrow V(t)$. Pour $t = 0, 1$, nous imposons $U(t) \subset U$. Remarquons que par le théorème 4.2.3, $\gamma\big([0,1]\big) \cap U(t)$ est inclu dans un ensemble de niveau de $f(t)$ pour tout $t \in [0,1]$. Notons $b(t)\colon V(t) \longrightarrow X/\mathbb{F}$ l'application feuille correspondant à $f(t)$, $t \in [0,1]$. Nous obtenons alors un recouvrement ouvert $\big(U(t)\big)_{t\in[0,1]}$ de $\gamma\big([0,1]\big)$ et il existe $0 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < 1$ tel que $(U_j)_{j\in\{1,\ldots,n\}}$, $U_j := U(t_j)$, $t_1 := 0, t_n := 1$, soit un recouvrement fini de $\gamma\big([0,1]\big)$. Nous supposons ce recouvrement minimal dans le sens qu'il ne contient aucun ouvert superflu. Comme pour $j = 1, \ldots, n$, l'intersection $\gamma\big([0,1]\big) \cap U_j$ est connexe et comme γ est continu et injectif, $I_j := \gamma^{-1}\Big(\gamma\big([0,1]\big) \cap U_j\Big) \Subset [0,1]$ est connexe. $\{I_j : j = 1, \ldots, n\}$ est donc un recouvrement de $[0,1]$ par des ouverts connexes qui ne contient aucun ensemble superflu. Par conséquent pour $j = 1, \ldots, n-1$, il existe $s_j \in I_{j(j+1)}$. Nous avons $\gamma(s_j) \in U_{j(j+1)}$ pour $j = 1, \ldots, n-1$. Par le lemme 4.2.7, il existe une $\mathbb{F}$-carte $\beta_{j(j+1)}\colon U_{j(j+1)} \longrightarrow Z_j$ et des applications ouvertes discrètes $u_k^j\colon Z_j \longrightarrow V_k := V(t_k)$, $k = j, j+1$ telles que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
 & U_{j(j+1)} \arrow[dl, "f(t_j)|_{U_{j(j+1)}}"'] \arrow[d, "\beta_{j(j+1)}"] \arrow[dr, "f(t_{j+1})|_{U_{j(j+1)}}"] & \\
V_j & Z_j \arrow[l, "u_j^j"'] \arrow[r, "u_{j+1}^j"] & V_{j+1}
\end{tikzcd}$$

Nous obtenons ainsi un massif

$$\mathbb{M} := \left(\left(u_j^i\colon Z_i \longrightarrow V_j\right)_{j\in\{i,i+1\}}\right)_{i\in\{1,\ldots,n-1\}}$$

dans $\mathfrak{K}^{\mathrm{do}}$.

Posons $Z := Z_1 \times_{V_2} \ldots \times_{V_{n-1}} Z_{n-1}$ et soit $p_i\colon Z \longrightarrow Z_i$, $i = 1, \ldots, n-1$ les projections canoniques (par le lemme 3.2.8, celles-ci sont ouvertes et discrètes). Nous obtenons alors un mont $M := (u_j\colon Z \longrightarrow V_j)_{j\in\{1,\ldots,n-1\}}$ dans $\mathfrak{K}^{\mathrm{do}}$ avec $u_j := u_j^j p_j$ pour $j = 1, \ldots, n-1$ et $u_n := u_n^{n-1} p_{n-1}$. Posons $y_j := f(t_j)\big(\gamma(s_j)\big)$ pour $j = 1, ..., n$. Par construction, nous avons $y = y_1$ et $y' = y_n$. Par la commutativité du diagramme précédent, nous avons $y_j = u_j^j \beta_{j(j+1)}\big(\gamma(s_j)\big)$ et $y_{j+1} = u_{j+1}^j \beta_{j(j+1)}\big(\gamma(s_j)\big)$. Donc pour $z := \big(\beta_{12}\gamma(s_1), ..., \beta_{(n-1)n}\gamma(s_{n-1})\big) \in Z$, nous avons $u_1(z) = y, u_n(z) = y'$ et il existe des voisinages $Z' \Subset Z$ de z, $W \Subset V_1 \times V_n$ de (y, y') tels que $(u_1, u_n)|_{Z'}\colon Z' \longrightarrow W$ soit propre (voir [KK83, 33 B.2]). Posons $A := (u_1, u_n)(Z')$. L'ensemble A est localement analytique dans $V \times V$ et inclu dans R^b car $(b_j\colon V_j \longrightarrow X/\mathbb{F})_{j\in\{1,\ldots,n\}}$, $b_j := b(t_j)$, est une liaison pour $\mathbb{M}$ dans $\mathfrak{S}$ donc aussi pour M. Les projections p_A, q_A sont ouvertes car nous avons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & Z' \arrow[dl, "u_1"'] \arrow[d, "(u_1,u_n)"] \arrow[dr, "u_n"] & \\
V_1 & A \arrow[l, "p_A"'] \arrow[r, "q_A"] & V_n
\end{tikzcd}$$

avec (u_1, u_n) surjective et u_1, u_n ouvertes.

Ad (b)**.** Supposons que y soit un point d'accumulation de $R^b(y)$ et soit $y' \in R^b(y)$. Nous allons montrer que y' est aussi un point d'accumulation de $R^b(y)$. Soit $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite dans $R^b(y) \cap V_1$ convergeant vers y. Notons R la relation induite par M sur $\dot{\bigcup}_{j\in\{1,\ldots,n\}} V_j$. Comme R est ouverte et $(y,y') = (u_1,u_n)(z) \in R$, il existe une suite $(y'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergeant vers y' avec $y'_k \in R(y_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ (voir le corollaire 2.1.14). Sans restriction de la généralité, $y'_k \in V_n$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et comme la famille d'applications feuille $(b_j : V_j \longrightarrow X/\mathbb{F})_{j\in\{1,\ldots,n\}}$ est une liaison pour M dans $\mathfrak{S}$, nous avons $y'_k \in b_n^{-1} b_1(y_k) = b_n^{-1} b_1(y) \subset b^{-1}b(y) = R^b(y)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ car une liaison pour M doit être R-invariante (voir 3.3.6). y' est donc un point d'accumulation de $R^b(y)$.

Ad (c)**.** Supposons qu'il existe un point $x \in U$ tel que $R^{\mathbb{F}}(x)$ soit fermé dans X et tel que $R^b\big(f(x)\big)$ ne soit pas discret. Il suit de l'affirmation (b) que $R^b\big(f(x)\big)$ ne possède pas de point isolé. De plus, l'ensemble $R^b\big(f(x)\big) = f(R^{\mathbb{F}}(x) \cap U)$ est fermé car f est ouverte, surjective et sépare les feuilles. $R^b\big(f(x)\big)$ est donc un ensemble parfait et par conséquent plus que dénombrable (voir [AH35, Satz VI', p.121]). D'autre part, $R^b f(x)$ est dénombrable. En effet, $(R^{\mathbb{F}}(x), \mathcal{T}_l)$ a une topologie dénombrable (proposition 4.1.23) et par conséquent $(R^{\mathbb{F}}(x) \cap U, \mathcal{T}_l)$ a un nombre dénombrable de composantes connexes. Comme chaque composante connexe de $(R^{\mathbb{F}}(x) \cap U, \mathcal{T}_l)$ est appliquée par f sur un point (théorème 4.2.3), il s'en suit que $R^b f(x) = f\big(R^{\mathbb{F}}(x) \cap U\big)$ est dénombrable : une contradiction. □

4.2.11 Théorème *Si L est une feuille fermée dans X et $\mathbb{F}$ un E-feuilletage, alors L est un sous-ensemble analytique de X.*

Preuve Nous allons montrer que L est localement analytique. Comme L est fermé dans X, ceci implique que L est un sous-ensemble analytique de X.
Soit $x \in L$, $f : U \longrightarrow V$ une $\mathbb{F}$-carte avec $x \in U$ et $b : V \longrightarrow X/\mathbb{F}$ son application feuille. Par le lemme 4.2.10, $b^{-1}\pi(L)$ est discret. Soit $U' \subset U$ un voisinage ouvert relativement compact dans U de x. La restriction $f|_{U'} : U' \longrightarrow f(U')$ est une $\mathbb{F}$-carte et nous avons $L \cap U' = (f|_{U'})^{-1}\Big(b^{-1}\big(\pi(L)\big) \cap f(U')\Big)$. Comme U' est relativement compact dans U, $f(U')$ est relativement compact dans V. Il s'en suit que $\big(b^{-1}\pi(L)\big) \cap f(U')$ est un ensemble fini et $L \cap U'$ est analytique. L est donc un sous-ensemble localement analytique de X. □

4.2.12 Corollaire *Si L est une feuille fermée dans X et $\mathbb{F}$ un E-feuilletage, alors $(L, \mathcal{T}_l) = (L, \mathcal{T}_i)$. Par conséquent, $(L, \mathcal{T}_l)$ est compact si et seulement si $(L, \mathcal{T}_i)$ est compact.*

Preuve Si L est une feuille fermée dans X, par la proposition 4.2.11, L est analytique. Il s'en suit que l'immersion $(L, \mathcal{T}_i) \to X$ est une variété intégrale localement maximale et par conséquent $(L, \mathcal{T}_l) = (L, \mathcal{T}_i)$. □

4.2.13 Remarque Par le corollaire 4.2.12, il n'est plus nécessaire de préciser par rapport à quelle topologie une feuille est compacte. Nous ne le dirons donc plus.

4.3 Structure complexe sur l'espace des feuilles

4.3.1 Théorème *([Egg80, 9.3]) Soit $\mathbb{F}$ un E-feuilletage sur un espace complexe normal X avec une topologie dénombrable. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(i) *$X/\mathbb{F}$ est séparé.*

(ii) *$R^{\mathbb{F}}$ est analytique.*

(iii) *$X/\mathbb{F}$ est un espace complexe.*

(iv) *Il existe une $\mathbb{F}$-carte globale.*

Preuve † "(i)⇒(ii)" Soit $(x_1, x_2) \in R^{\mathbb{F}}$. Nous allons d'abord montrer que nous pouvons trouver une $\mathbb{F}$-carte $f : U \longrightarrow V$ avec $x_1, x_2 \in U$ et telle que la relation d'équivalence définie par l'application feuille de f soit finie.
Soit $f_i : U_i \longrightarrow V_i$ une $\mathbb{F}$-carte avec $x_i \in U_i$ et $b_i : V_i \longrightarrow X/\mathbb{F}$ son application feuille, $i = 1, 2$. Comme $X/\mathbb{F}$ est séparé, toutes les feuilles de $\mathbb{F}$ sont fermées et il suit du lemme 4.2.10 que les applications feuilles b_1, b_2 sont discrètes. $X/\mathbb{F}$ étant localement compact (car $X/\mathbb{F}$ est séparé et $R^{\mathbb{F}}$ est ouverte), par [KK83, 33. B2], nous pouvons supposer, sans restriction de la généralité, que $b_i : V_i \longrightarrow b(V_i)$ est propre pour $i = 1, 2$ et que $b_1(V_1) = b_2(V_2)$. Si $x_1 = x_2$, $f = f_1$ est une $\mathbb{F}$-carte avec la propriété désirée. Si $x_1 \neq x_2$, sans restriction de la généralité, nous avons $U_{12} = \emptyset$. Nous définissons alors $U := U_1 \cup U_2,\ V := V_1 \dot{\bigcup} V_2$ et $f : U \longrightarrow V,\ f|_{U_i} := f_i,\ i = 1, 2$. L'application f est alors une $\mathbb{F}$-carte avec la propriété voulue.
Nous pouvons donc trouver une $\mathbb{F}$-carte $f : U \longrightarrow V$ telle que la relation d'équivalence R^b soit finie, où $b : V \longrightarrow X/\mathbb{F}$ est l'application feuille correspondant à f. Comme R^b est en plus ouverte et très faiblement analytique (lemme 4.2.10), il suit du théorème 2.2.3 que R^b est analytique. Nous avons $R^{\mathbb{F}} \cap (U \times U) = (f \times f)^{-1}(R^b)$ et donc $R^{\mathbb{F}}$ est localement analytique. L'espace des feuilles étant séparé, $R^{\mathbb{F}} \subset X \times X$ est fermé et par conséquent $R^{\mathbb{F}}$ est analytique.

"(ii)⇒(iii)" $X/\mathbb{F}$ est un espace complexe car $R^{\mathbb{F}}$ est analytique et ouverte (voir [BR90]).

"(iii)⇒(i)" Trivial.

"(iii)⇒(iv)" La projection canonique $\pi : X \longrightarrow X/\mathbb{F}$ est une $\mathbb{F}$-carte globale.

"(iv)⇒(ii)" Si $f : X \longrightarrow V$ est une $\mathbb{F}$-carte globale. Comme f sépare les feuilles, il suit du théorème 4.2.3 que $R^{\mathbb{F}} = R^f$. □

Chapitre 5

Critères de stabilité

Dans ce chapitre, nous verrons deux critères de stabilité d'un E-feuilletage. Nous montrerons que tous les E-feuilletages compacts (c'est-à-dire dont toutes les feuilles sont compactes) de codimension 1 sur un espace complexe normale sont stables. Si nous avons un feuilletage compact de codimension 1 sur une variété complexe, il suit du théorème de Mattei-Moussu et du critère de simplicité de Reiffen que c'est un E-feuilletage. Par conséquent, tout feuilletage compact de codimension 1 sur une variété complexe est stable.

5.1 Stabilité

5.1.1 Définition *Une feuille compacte L d'un feuilletage $\mathbb{F}$ sur un espace complexe avec des feuilles partout est* ***stable*** *si elle possède un système fondamental de voisinages $\mathbb{F}$-saturés. Dans le cas où $\mathbb{F}$ est compact, nous disons que $\mathbb{F}$ est* ***stable*** *si toutes les feuilles de $\mathbb{F}$ sont stables.*

5.1.2 Lemme *Un feuilletage compact $\mathbb{F}$ sur un espace complexe X est stable si et seulement si $X/\mathbb{F}$ est séparé.*

Preuve "$\Rightarrow$" C'est [KK83, 33 B.4].
"$\Leftarrow$" Soit L une feuille de $\mathbb{F}$ et U un voisinage de L. Nous choisissons un voisinage $V \Subset U$ de L qui est relativement compact dans U. Comme $X/\mathbb{F}$ est séparé, $\pi(\partial V)$ est un ensemble compact donc fermé. Les feuilles de $\mathbb{F}$ étant des ensembles connexes, pour tout $x \in W := V \setminus \pi^{-1}\pi(\partial V) \Subset U$, nous avons $R^{\mathbb{F}}(x) \subset W$. Par conséquent, $W \subset U$ est un voisinage $\mathbb{F}$-saturé de L. $\square$

5.2 Germes d'holonomie

Dans cette section, nous travaillerons avec un espace complexe normal X connexe à topologie dénombrable et un E-feuilletage $\mathbb{F}$ sur X. Nous allons construire un analogue au groupe d'holonomie d'une feuille compacte d'un H-feuilletage (voir [Hol78]). Comme nous n'avons pas de "compatibilité biholomorphe" entre les cartes, nous n'aurons pas des germes de biholomorphismes mais des germes de relation.

5.2.1 Définitions *Soit L une feuille de $\mathbb{F}$, $f\colon U \longrightarrow V$ une $\mathbb{F}$-carte avec V normal et soit $T \Subset U$. Le couple (T,f) est* ***L-admissible*** *si $f(U \cap L)$ est constitué d'un seul point et si T est non vide relativement compact dans U. Une famille finie $\big((T_j, f_j)\big)_{j\in J}$ est* ***recouvrement L-admissible*** *(de L) si elle satisfait les conditions suivantes :*

(a) *$(T_j)_{j\in J}$ est un recouvrement de L,*

(b) *(T_j, f_j) est un couple L-admissible pour tout $j \in J$.*

5.2.2 Proposition *Si L est une feuille fermée de $\mathbb{F}$, alors pour tout $x \in L$, il existe un couple L-admissible (T,f) avec $x \in T$. Par conséquent, si L est compacte, alors il existe un recouvrement L-admissible.*

Preuve Soit $x \in L$ et $f\colon U \longrightarrow V$ une $\mathbb{F}$-carte avec $U \Subset X$ un voisinage de x. Par la remarque 4.2.2(i), nous pouvons supposer que V est normal. Comme L est fermée, $f(L \cap U)$ est discret $\big($lemme 4.2.10(c)$\big)$. Donc, sans restriction de la généralité, $f(L \cap U)$ est constitué d'un seul point. Nous choisissons un voisinage $T \Subset U$ de x relativement compact dans U et (T,f) est alors un couple L-admissible. $\square$

Soit L une feuille compacte de $\mathbb{F}$, $\mathfrak{U} = \big((T_j, f_j\colon U_j \longrightarrow V_j)\big)_{j\in J}$, $J := \{1,..,n\}$, un recouvrement L-admissible et $b_j\colon V_j \longrightarrow X/\mathbb{F}$ l'application feuille correspondant à f_j, $j \in J$. Nous allons construire un massif $\mathbb{M}(L,\mathfrak{U})$ dont les vallées sont $(V_j)_{j\in J}$ (si $\operatorname{Card} J = 1$, nous augmentons artificiellement la cardinalité de J en prenant deux fois le même couple). Les monts constituants $\mathbb{M}(L,\mathfrak{U})$ sont des 2-monts et deux vallées V_{j_1}, V_{j_2} sont les vallées d'un 2-mont constituant $\mathbb{M}(L,\mathfrak{U})$ si $\overline{T_{j_1j_2}} \cap L \neq \emptyset$. Par le lemme 4.2.7, nous pouvons obtenir le diagramme commutatif de la figure 5.1, où $\beta_{j_1j_2}$ est la base complexe de $f_{j_1}|_{U_{j_1j_2}}$ et $u_{j_1}^{j_1j_2}, u_{j_2}^{j_1j_2}$ les applications holomorphes

$$\begin{tikzcd} & U_{j_1j_2} \arrow[dl, "f_{j_1}|_{U_{j_1j_2}}"'] \arrow[d, "\beta_{j_1j_2}"] \arrow[dr, "f_{j_2}|_{U_{j_1j_2}}"] & \\ V_{j_1} & Z_{j_1j_2} \arrow[l, "u_{j_1}^{j_1j_2}"] \arrow[r, "u_{j_2}^{j_1j_2}"'] & V_{j_2} \end{tikzcd}$$

FIG. 5.1: construction de $\mathbb{M}(L,\mathfrak{U})$

ouvertes discrètes telles que ce diagramme commute. Nous posons $I := \{(j_1,j_2) \in J \times J : j_1 < j_2,\ \overline{T_{j_1j_2}} \cap L \neq \emptyset\}$. Nous obtenons alors le massif

$$\mathbb{M}(L,\mathfrak{U}) := \Big((u_j^{j_1j_2}\colon Z_{j_1j_2} \longrightarrow V_j)_{j\in\{j_1,j_2\}}\Big)_{(j_1,j_2)\in I}.$$

5.2.3 Propriétés de $\mathbb{M}(L,\mathfrak{U})$

(a) $\mathbb{M}(L,\mathfrak{U})$ *est un massif connexe dans* $\mathfrak{K}^{\mathrm{do}}$.

(b) *Comme* $\mathfrak{U}$ *est un recouvrement* L*-admissible,* $f_j(U_j \cap L) = b_j^{-1}\pi(L)$ *est constitué d'un seul point* v_j *pour chaque* $j \in J$.

(c) *Pour* $(j_1, j_2) \in I$ *et* $j = j_1, j_2$*, nous avons* $(u_j^{j_1 j_2})^{-1}(v_j) = \beta_{j_1 j_2}\big(f_j^{-1}(v_j) \cap U_{j_1 j_2}\big) = \beta_{j_1 j_2}(L \cap U_{j_1 j_2})$*. Par conséquent* $(u_{j_1}^{j_1 j_2})^{-1}(v_{j_1}) = (u_{j_2}^{j_1 j_2})^{-1}(v_{j_2})$ *et* $\{v_j : j \in J\}$ *est saturé par rapport à la relation canonique définie par* $\mathbb{M}(L,\mathfrak{U})$.

(d) *La famille* $(b_j : V_j \longrightarrow X/\mathbb{F})_{j \in J}$ *est une liaison pour* $\mathbb{M}(L,\mathfrak{U})$ *dans* $\mathfrak{T}$*. De plus, si toutes les autres feuilles de* $\mathbb{F}$ *sont fermées dans* X*, il suit du lemme 4.2.10 que cette liaison est discrète.*

(e) *S'il existe un voisinage* $W \Subset \bigcup_{j \in J} T_j$ *de* L *qui est* $\mathbb{F}$*-saturé, alors la liaison* $\big(b_j|_{V_j'} : V_j' \longrightarrow W/(\mathbb{F}|_W)\big)_{j \in J}$*, avec* $V_j' := f_j(T_j \cap W)$*, est un pushout dans* $\mathfrak{T}$ *pour*

$$\mathbb{M}' := \Big(\big(u_j^{j_1 j_2}|_{\beta_{j_1 j_2}(T_{j_1 j_2} \cap W)} : \beta_{j_1 j_2}(T_{j_1 j_2} \cap W) \longrightarrow V_j'\big)_{j \in \{j_1, j_2\}}\Big)_{(j_1, j_2) \in I}.$$

Preuve de la propriété (e) Soit R la relation canonique définie par $\mathbb{M}'$ sur $\dot{\bigcup}_{j \in J} V_j'$. Nous devons montrer que $W/(\mathbb{F}|_W)$ est isomorphe à $(\dot{\bigcup}_{j \in J} V_j')/R$. Comme les projections canoniques $V_j' \to (\dot{\bigcup}_{j \in J} V_j')/R$ et les applications feuilles $b_j|_{V_j'}$ sont ouvertes, il suffit de montrer que pour tout $j_0, j_1 \in J$, nous avons $(y_0, y_1) \in R^\infty \cap (V_{j_0}' \times V_{j_1}')$ si et seulement si $b_{j_0}(y_0) = b_{j_1}(y_1)$. L'implication "$\Rightarrow$" est vérifiée car $(b_j|_{V_j'})_{j \in J}$ est une liaison pour $\mathbb{M}'$. Démontrons l'implication "$\Leftarrow$". Soit $x_i \in f_{j_i}^{-1}(y_i) \cap T_{j_i},\ i = 0, 1$ et posons $L' := R^{\mathbb{F}}(x_1) = R^{\mathbb{F}}(x_2)$. Comme L' est connexe par arc (proposition 4.1.25), il existe un chemin $\gamma : [0,1] \longrightarrow L' \subset W$ avec $\gamma(0) = x_1$ et $\gamma(1) = x_2$. Il existe alors $0 < s_1 < \ldots < s_{n-1} < 1$ et $k_1, \ldots, k_{n-2} \in J,\ k_0 := j_0,\ k_{n-1} := j_1$ tels que $\gamma(t) \in T_{k_i}$ pour tout $t \in [s_i, s_{i+1}],\ s_0 := 0,\ s_n := 1,\ i = 0, \ldots, n-1$. Pour $i = 0, \ldots, n-1$, f_{k_i} applique donc $\gamma\big([s_i, s_{i+1}]\big)$ sur un seul point w_i. Nous avons

$$(w_i, w_{i+1}) = \big(u_{k_i}^{k_i k_{i+1}} \beta_{k_i k_{i+1}}(s_{i+1}), u_{k_{i+1}}^{k_i k_{i+1}} \beta_{k_i k_{i+1}}(s_{i+1})\big) \in R$$

pour $i = 0, \ldots, n-2$ et $w_0 = y_0, w_{n-1} = y_1$ donc $(y_0, y_1) \in R^{n-2}$. $\square$

$\mathbb{M}(L,\mathfrak{U})$ induit un massif connexe $\mathbb{M}_g(L,\mathfrak{U})$ dans $\mathfrak{K}_{\mathrm{g}}^{\mathrm{do}}$ de la façon suivante : chaque 2-mont $(u_j^{j_1 j_2})_{j \in \{j_1, j_2\}}$ de $\mathbb{M}(L,\mathfrak{U})$ induit un massif

$$\Big(\big(u_{j,a}^{j_1 j_2} : Z_{j_1 j_2, a} \longrightarrow V_{j, v_j}\big)_{j \in \{j_1, j_2\}}\Big)_{a \in \beta_{j_1 j_2}(L \cap \overline{T_{j_1 j_2}})}$$

dans $\mathfrak{K}_{\mathrm{g}}^{\mathrm{do}}$ (comme $\beta_{j_1 j_2}$ est une $\mathbb{F}$-carte et L est compacte, $\beta_{j_1 j_2}(L \cap \overline{T_{j_1 j_2}})$ est un ensemble fini). La réunion de tous ces massifs donne le massif $\mathbb{M}_g(L,\mathfrak{U})$ et $(b_{j, v_j})_{j \in J}$ est une liaison pour $\mathbb{M}_g(L,\mathfrak{U})$ dans $\mathfrak{T}_{\mathrm{g}}$.

5.2.4 Remarque Si $(l_{j,v_j}:V_{j,v_j}\longrightarrow A_a)_{j\in J}$ est une liaison pour $\mathbb{M}_g(L,\mathfrak{U})$ dans $\mathfrak{T}_{\mathrm{g}}$, il existe alors pour tout $(j_1,j_2)\in I$ des voisinages $Z'_{j_1j_2}\Subset Z_{j_1j_2}$ de $\beta_{j_1j_2}(L\cap\overline{T_{j_1j_2}})$ et des voisinages $V'_j\Subset V_j$ de chaque v_j aussi petit que l'on veut tels qu'il existe un représentant $(l_j:V'_j\longrightarrow A)_{j\in J}$ de $(l_{j,v_j})_{j\in J}$ qui soit une liaison pour

$$\Big(\big(u_j^{j_1j_2}|_{Z'_{j_1j_2}}:Z'_{j_1j_2}\longrightarrow V'_j\big)_{j\in\{j_1,j_2\}}\Big)_{(j_1,j_2)\in I}$$

dans $\mathfrak{T}$.

5.2.5 Définition *Soit L une feuille compacte de $\mathbb{F}$ et $\mathfrak{U}$ un recouvrement L-admissible. Un* ***germe d'holonomie de L par rapport à $\mathfrak{U}$*** *est un germe d'holonomie de $\mathbb{M}_g(L,\mathfrak{U})$ sur une de ses vallées.*

5.2.6 Remarque Par construction, un germe d'holonomie de L par rapport à $\mathfrak{U}$ est un germe de relation ouvert et discret. De plus, s'il existe un germe d'holonomie de L par rapport à $\mathfrak{U}$ qui induit un germe de relation d'équivalence analytique, alors tous les germes d'holonomie de L par rapport à $\mathfrak{U}$ induisent des germes de relation d'équivalence analytique (voir le corollaire 3.4.11).

5.2.7 Théorème *(d'après [Egg80, 10.4]) Soit L une feuille compacte de $\mathbb{F}$, $\mathfrak{U}$ un recouvrement L-admissible et (H,v) un germe d'holonomie de L par rapport à $\mathfrak{U}$. Si $(H,v)^\infty$ est stationnaire, alors L est stable. Si de plus toutes les autres feuilles de $\mathbb{F}$ sont fermées, l'inverse est vrai.*

Preuve Soit $\mathfrak{U}=\big((T_j,f_j:U_j\longrightarrow V_j)\big)_{j\in J}$, $J:=\{1,..,n\}$, un recouvrement L-admissible et $b_j:V_j\longrightarrow X/\mathbb{F}$ l'application feuille correspondant à f_j, $j\in J$. Pour $j_0,j_1\in J$ avec $\overline{T_{j_0j_1}}\cap L\neq\emptyset$, nous avons le diagramme commutatif de la figure 5.1 où $\beta_{j_0j_1}:U_{j_0j_1}\longrightarrow Z_{j_0j_1}$ est la base complexe de $f_{j_0}|_{U_{j_0j_1}}$ et $u_{j_0}^{j_0j_1},u_{j_1}^{j_0j_1}$ les applications holomorphes ouvertes discrètes telles que ce diagramme commute. Posons $v_j:=f_j(L\cap U_j)$, $g_j:=f_j|T_j$, $\overline{g}_j:=f_j|\overline{T}_j$ pour $j\in J$. Soit M_a un mont $\mathfrak{T}_{\mathrm{g}}$-équivalent à $\mathbb{M}_g(L,\mathfrak{U})$ (par le corollaire 3.2.15, un tel mont existe).

Supposons que $(H,v)^\infty$ soit stationnaire. Nous allons montrer que L est alors stable. Soit W un voisinage de L. Par le corollaire 3.4.6 et par la remarque 5.2.6, il existe un représentant $M:=(u_j:Z\longrightarrow V'_j)_{j\in J}$ de M_a dans $\mathfrak{K}^{\mathrm{fos}}$ dont les vallées $V'_j\Subset f_j(T_j)$ sont des espaces complexes normaux connexes, tel que chaque relation d'holonomie de M définisse une relation d'équivalence analytique et tel que $(b_j|_{V'_j})_{j\in J}$ soit une liaison pour M dans $\mathfrak{T}$. Notons R la relation définie par M sur $\dot{\bigcup}_{j\in J}V'_j$. Par le théorème 3.3.14, R^∞ est analytique finie et la liaison $\big(p_j:V'_j\longrightarrow(\dot{\bigcup}_{j\in J}V'_j)/R\big)_{j\in J}$ définie par les projections canoniques est un pushout pour M dans $\mathfrak{K}^{\mathrm{fos}}$. Remarquons que comme $(p_{j,v_j})_{j\in J}$ est une liaison pour M_a dans $\mathfrak{T}_{\mathrm{g}}$, c'est aussi une liaison pour $\mathbb{M}_g(L,\mathfrak{U})$ (il s'agit même d'un pushout dans $\mathfrak{K}^{\mathrm{do}}_{\mathrm{g}}$, voir le lemme 3.4.7 et sa preuve). Pour chaque $j\in J$, comme (T_j,f_j) est un couple L-admissible, $L\cap\overline{T}_j$ est une classe d'équivalence de $R^{\overline{g}_j}$. Comme $\overline{g}_j$ est propre ([Bou71, I§10.2 Corollaire 2]),

$R^{\overline{g}_j}$ est une relation d'équivalence propre et chaque classe d'équivalence de $R^{\overline{g}_j}$ possède un système fondamental de voisinages $R^{\overline{g}_j}$-saturés ([KK83, 33 B.4]). Il existe donc un voisinage $\widetilde{T'_j} \Subset \overline{g}_j^{-1}(V'_j) \cap W$ de $L \cap \overline{T}_j$ qui est $R^{\overline{g}_j}$-saturé. Posons $T'_j := \widetilde{T'_j} \cap T_j \Subset g_j^{-1}(V'_j) \cap W$. L'ensemble T'_j est R^{g_j}-saturé pour tout $j \in J$ et $(T'_j)_{j\in J}$ est un recouvrement ouvert de L.
$\{v_j : j \in J\}$ étant R-saturé $\big($car $(b_j|_{V'_j})_{j\in J}$ est une liaison pour M et $b_j^{-1}\pi(L) = v_j$ pour tout $j \in J\big)$ et R^∞ étant propre, chaque $v_j, j \in J$, possède un système fondamental de voisinages $\{V_j^{(n)} : n \in \mathbb{N}\}$ relativement compacts dans $g_j(T'_j) \subset V'_j$ tel que $\dot{\bigcup}_{j\in J} V_j^{(n)}$ soit R-saturé pour tout $n \in \mathbb{N}$ (voir [KK83, 33 B.4]). Posons

$$W_n := \bigcup_{j\in J} g_j^{-1}(V_j^{(n)}).$$

Pour tout n, nous avons $W_n \subset W$ car pour chaque $j \in J$, nous avons $g_j^{-1}(V_j^{(n)}) \subset g_j^{-1}g_j(T'_j) = T'_j \subset W$. Nous allons voir qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que W_N soit $\mathbb{F}$-saturé (et ceci termine la preuve de la stabilité de L). Si un tel N n'existe pas, alors pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe une feuille L_n avec $L_n \cap W_n \neq \emptyset$ et $L_n \not\subset W_n$. Comme $(L_n, \mathcal{T}_l)$ est connexe par arc (lemme 4.1.25), pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un chemin injectif $\gamma_n : [0,1] \longrightarrow (L_n, \mathcal{T}_l)$ avec $\gamma_n(0) \in W_n$ et $\gamma_n(1) \notin W_n$. Posons $t^{(n)} := \min\big\{t \in [0,1] : \gamma_n(t) \notin W_n\big\}$ et $x^{(n)} := \gamma_n(t^{(n)})$. Nous avons alors $x^{(n)} \in \overline{W_n \cap L_n} \setminus W_n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $j_0(n) \in J$ tel que $x^{(n)} \in \overline{\gamma_n\big([0, t^{(n)}[\big) \cap g_{j_0(n)}^{-1}(V_{j_0}^{(n)})} \subset U_{j_0(n)}$. Sans restriction de la généralité, $j_0(n)$ est constant et prend toujours la valeur j_0. Nous avons $C_{x^{(n)}}(U_{j_0} \cap L_n, \mathcal{T}_l) \Subset (L_n, \mathcal{T}_l)$ et comme γ_n est continue, il existe $\delta_n > 0$, tel que

$$\gamma_n\big(]t^{(n)} - \delta_n, t^{(n)} + \delta_n[\big) \subset C_{x^{(n)}}(U_{j_0} \cap L_n, \mathcal{T}_l) \underset{\text{th. 4.2.3}}{=} C_{x^{(n)}}\big(f_{j_0}^{-1} f_{j_0}(x^{(n)})\big). \tag{5.1}$$

Par le choix de j_0, il existe une suite $(t_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}$ dans $]t^{(n)} - \delta_n, t^{(n)}[$ qui converge vers $t^{(n)}$ avec $\gamma_n(t_k^{(n)}) \in g_{j_0}^{-1}(V_{j_0}^{(n)})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Il suit alors de l'équation 5.1 que $f_{j_0}(x^{(n)}) = f_{j_0}\gamma_n(t^{(n)}) = g_{j_0}\gamma_n(t_k^{(n)}) \in V_{j_0}^{(n)}$ pour tout $k, n \in \mathbb{N}$. Par conséquent, $x^{(n)} \notin T_{j_0}$ sinon nous aurions $x^{(n)} \in f_{j_0}^{-1}(V_{j_0}^{(n)}) \cap T_{j_0} = g_{j_0}^{-1}(V_{j_0}^{(n)}) \subset W_n$: une contradiction. $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite dans le compact ∂T_{j_0} et sans restriction de la généralité, $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point $x \in \partial T_{j_0}$.
Comme $f_{j_0}(x^{(n)}) \in V_{j_0}^{(n)}$ pour tout $n \in N$, la suite $\big(f_{j_0}(x^{(n)})\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers v_{j_0}. Par conséquent $f_{j_0}(x) = v_{j_0}$ et $x \in L$. Comme $(T'_j)_{j\in J}$ est un recouvrement de L, il existe $j_1 \in J$ tel que $x \in T'_{j_1}$. Sans restriction de la généralité, $j_0 < j_1$ et comme $x \in \overline{T}_{j_0} \cap T_{j_1} \cap L$, nous avons $(j_0, j_1) \in I$. Sans restriction de la généralité, $x^{(n)} \in T'_{j_1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Nous avons $C_{x^{(n)}}(U_{j_0j_1} \cap L_n, \mathcal{T}_l) \Subset (L_n, \mathcal{T}_l)$ et γ_n étant continue, il existe $\epsilon_n > 0$, tel que

$$\gamma_n\big(]t^{(n)} - \epsilon_n, t^{(n)} + \epsilon_n[\big) \subset C_{x^{(n)}}(U_{j_0j_1} \cap L_n, \mathcal{T}_l) \underset{\text{th. 4.2.3}}{=} C_{x^{(n)}}\big(\beta_{j_0j_1}^{-1}\beta_{j_0j_1}(x^{(n)})\big). \tag{5.2}$$

Par le choix de j_0, il existe une suite $(s_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}$ dans $]t^{(n)} - \epsilon_n, t^{(n)}[$ qui converge vers $t^{(n)}$ avec $\gamma(s_k^{(n)}) \in g_{j_0}^{-1}(V_{j_0}^{(n)})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Comme $x^{(n)} \in T'_{j_1}$, sans restriction de la généralité, nous avons $\gamma_n(s_k^{(n)}) \in T'_{j_1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Nous avons alors $x_k^{(n)} := \gamma_n(s_k^{(n)}) \in T'_{j_1 j_2}$ pour tout $k, n \in \mathbb{N}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, il suit de l'équation 5.2 que $\beta_{j_0 j_1}(x_k^{(n)}) = \beta_{j_0 j_1}(x^{(n)}) =: c_n$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Il suit du diagramme 5.1 que $g_{j_0}(x_k^{(n)}) = f_{j_0}(x^{(n)}) =: y_{0,n} \in V_{j_0}^{(n)}$ et $f_{j_1}(x_k^{(n)}) = f_{j_1}(x^{(n)}) =: y_{1,n}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $n, k \in \mathbb{N}$, nous avons

$$p_{j_0} g_{j_0}\big(x_k^{(n)}\big) \neq p_{j_1} g_{j_1}\big(x_k^{(n)}\big). \tag{5.3}$$

Supposons qu'il existe $K, N \in \mathbb{N}$, tel que $p_{j_0} g_{j_0}\big(x_K^{(N)}\big) = p_{j_1} g_{j_1}\big(x_K^{(N)}\big)$. Il s'en suit que $p_{j_0}(y_{0,N}) = p_{j_0} g_{j_0}(x_K^{(N)}) = p_{j_1} g_{j_1}(x_K^{(N)}) = p_{j_1}(y_{1,N})$ et par conséquent $(y_{0,N}, y_{1,N}) \in R^\infty$. Donc $y_{1,N}$ est dans $V_{j_1}^{(N)}$ car $\dot{\bigcup}_{j \in J} V_j^{(N)}$ est R-saturé et $y_{0,N} \in V_{j_0}^{(N)}$. Il s'en suit que $x^{(N)} \in g_{j_1}^{-1}(y_{1,N}) \subset g_{j_1}^{-1}(V_{j_1}^{(N)}) \subset W_N$: une contradiction.
La suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $c := \beta_{j_0 j_1}(x) \in \beta_{j_0 j_1}(L \cap \overline{T_{j_0 j_1}})$ et il suit de l'équation 5.3 et du diagramme commutatif de la figure 5.1 que

$$p_{j_0} u_{j_0}^{j_0 j_1}(c_n) \neq p_{j_1} u_{j_1}^{j_0 j_1}(c_n),$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc $(p_{j,v_j})_{j \in \{j_0, j_1\}}$ n'est pas une liaison pour $(u_{j,c}^{j_0 j_1})_{j \in \{j_0, j_1\}}$. Comme ce 2-mont est inclu dans $\mathbb{M}_g(L, \mathfrak{U})$, il s'en suit que $(p_{j,v_j})_{j \in J}$ n'est pas une liaison pour $\mathbb{M}_g(L, \mathfrak{U})$: une contradiction. L est donc stable.

Supposons maintenant que L est stable et que toutes les autres feuilles de $\mathbb{F}$ sont fermées. Nous allons montrer que $(H, v)^\infty$ est stationnaire. Par la remarque 5.2.6, il suffit de trouver un germe d'holonomie (H', v') de $\mathbb{M}_g(L, \mathfrak{U})$ avec $(H', v')^\infty$ stationnaire. Soit $M := (u_j : Z \longrightarrow V'_j)_{j \in J}$ un représentant admissible de M_a par rapport à V'_1 avec V'_j relativement compact dans $f_j(T_j)$ pour tout $j \in J$ et tel que $(b_j|_{V'_j})_{j \in J}$ soit une liaison pour M dans $\mathfrak{T}$. Les feuilles de $\mathbb{F}$ étant fermées, par la propriété 5.2.3(d) de $\mathbb{M}(L, \mathfrak{U})$, $(b_j|_{V'_j})_{j \in J}$ est une liaison quasi-finie. Notons R la relation canonique définie par M sur $\dot{\bigcup}_{j \in J} V'_j$ et H' la relation d'holonomie de M sur V'_1. Par le lemme 3.3.11(b), nous avons $H'^\infty = R^\infty|_{V'_1}$. Comme $(b_j|_{V'_j})_{j \in J}$ est une liaison pour M dans $\mathfrak{T}$, elle est R-invariante (lemme 3.3.6) et donc $H'^\infty \subset R^{b_1|_{V'_1}}$. Par conséquent, H'^∞ est quasi-finie. Nous allons voir que $\{v_1\} = H'^\infty(v_1)$ possède une système fondamental de voisinages qui sont $(R^{b_1|_{V'_1}})$-saturés et par conséquent aussi H'-saturés. Soit $V''_1 \Subset V'_1$ un voisinage de v_1. L'ensemble $\overline{g}_1^{-1}(V''_1) \Subset \overline{T}_1$ est un voisinage de $L \cap \overline{T}_1$. Comme L possède un système fondamental de voisinages $\mathbb{F}$-saturés, il suit du lemme 2.1.9, qu'il existe un voisinage $\widetilde{T} \Subset \overline{T}_1$ qui est $(R^{\mathbb{F}})|_{\overline{T}_1}$-saturé. $T := \widetilde{T} \cap T_1 \Subset T_1$, est donc $(R^{\mathbb{F}})|_{T_1}$-saturé et $g_1(T) \Subset V''_1$ est $(R^{b_1})|_{f_1(T_1)}$-saturé. Comme $V'_1 \subset f_1(T_1)$, $g_1(T_1)$ est aussi $(R^{b_1|_{V'_1}})$-saturé.
Par le théorème 2.2.9, il existe un voisinage $W \subset V'_1$ de v_1 tel que $(H|_W)^\infty$ soit analytique. Il suit donc du théorème 2.4.12 que $(H', v')^\infty$, $v' = v_1$ est stationnaire. $\square$

5.2.8 Théorème *Soit L une feuille compacte de $\mathbb{F}$, $\mathfrak{U}$ un recouvrement L-admissible, $(T, f : U \longrightarrow V)$ un membre de $\mathfrak{U}$ et (H, v), $v := f(L \cap U)$, un germe d'holonomie* *de L par rapport à $\mathfrak{U}$. Si $(H,v)^\infty$ est stationnaire, nous avons les affirmations suivantes :*

(a) *Il existe un voisinage $\mathbb{F}$-saturé $A \Subset X$ de L tel que $\mathbb{F}|_A$ soit compact et stable.*

(b) *Pour tout représentant H de (H,v) sur un voisinage $V' \Subset V$ de v il existe un voisinage $W \Subset V'$ de v tel que $(y,y') \in (H|_W)^\infty$ si et seulement si $f^{-1}(y)$ et $f^{-1}(y')$ sont dans la même feuille.*

Preuve Soit $\mathfrak{U} = \big((T_j, f_j : U_j \longrightarrow V_j)\big)_{j\in J}$, $J := \{1,..,n\}$, un recouvrement L-admissible et $b_j : V_j \longrightarrow X/\mathbb{F}$ l'application feuille correspondant à f_j, $j \in J$. Pour $j_0, j_1 \in J$ avec $\overline{T_{j_0j_1}} \cap L \neq \emptyset$, nous avons le diagramme commutatif de la figure 5.1 page 70, où $\beta_{j_0j_1} : U_{j_0j_1} \longrightarrow Z_{j_0j_1}$ est la base complexe de $f_{j_0}|_{U_{j_0j_1}}$ et $u_{j_0}^{j_0j_1}, u_{j_1}^{j_0j_1}$ les applications holomorphes ouvertes discrètes telles que ce diagramme commute. Posons $v_j := f_j(L \cap U_j)$, $j \in J$. Soit M_a un mont $\mathfrak{T}_{\mathrm{g}}$-équivalent à $\mathbb{M}_g(L,\mathfrak{U})$. Par le corollaire 3.4.6 et par la remarque 5.2.6, il existe un représentant $M := (u_j : Z \longrightarrow W_j)_{j\in J}$ de M_a dans $\mathfrak{K}^{\mathrm{fos}}$ dont les vallées $W_j \Subset f_j(T_j)$ sont des espaces complexes normaux connexes, tel que chaque relation d'holonomie de M définisse une relation d'équivalence analytique et tel que $(b_j|_{W_j})_{j\in J}$ soit une liaison pour M dans $\mathfrak{T}$. Notons R la relation définie par M sur $\dot{\bigcup}_{j\in J} W_j$. Par le théorème 3.3.14, R^∞ est analytique finie et la liaison $\big(p_j : W_j \longrightarrow (\dot{\bigcup}_{j\in J} W_j)/R\big)_{j\in J}$ définie par les projections canoniques est un pushout pour M dans $\mathfrak{K}^{\mathrm{fos}}$.
Par le remarque 5.2.4, il existe pour tout $(j_1,j_2) \in I$ un voisinage $Z'_{j_1j_2} \Subset Z_{j_1j_2}$ de $\beta_{j_1j_2}(L \cap \overline{T_{j_1j_2}})$ avec $u_j^{j_1j_2}(Z'_{j_1j_2}) \subset W_j$, $j = j_1, j_2$ tel que $(p_j|_{W_j})_{j\in J}$ soit une liaison pour $\mathbb{M} := \big((u_j^{j_1j_2}|_{Z'_{j_1j_2}} : Z'_{j_1j_2} \longrightarrow W_j)_{j\in\{j_1,j_2\}}\big)_{(j_1,j_2)\in I}$.
Comme L est stable (théorème 5.2.7), il existe un voisinage $T \Subset \bigcup_{j\in J} T_j$ de L qui est $\mathbb{F}$-saturé. Par le lemme 2.1.9, pour tout $j \in J$, il existe un voisinage $\widetilde{A}_j \Subset \overline{T}_j \cap f_j^{-1}(W_j) \cap T$ de $L \cap \overline{T}_j$ qui est $(R^{\mathbb{F}})|_{\overline{T}_j}$-saturé et nous posons $A_j := \widetilde{A}_j \cap T_j$. Pour la même raison, pour tout $(j_1,j_2) \in I$, il existe un voisinage $\widetilde{A}_{j_1j_2} \Subset \overline{T_{j_1j_2}} \cap \beta_{j_1j_2}^{-1}(Z'_{j_1j_2})$ de $L \cap \overline{T_{j_1j_2}}$ qui est $(R^{\mathbb{F}})|_{\overline{T_{j_1j_2}}}$-saturé et nous posons $A_{j_1j_2} := \widetilde{A}_{j_1j_2} \cap T_{j_1j_2}$. Nous définissons alors

$$A := \left(\bigcap_{(j_1,j_2)\in I} R^{\mathbb{F}}(A_{j_1j_2})\right) \cap \left(\bigcap_{j\in J} R^{\mathbb{F}}(A_j)\right) \Subset X$$

et A est un voisinage $\mathbb{F}$-saturé de L inclu dans T. Pour $j \in J$, nous posons $Y_j := f_j(A \cap T_j) \subset f_j(A_j) \subset f_j(\widetilde{A}_j) \subset W_j$ (la première inclusion est vérifiée car A_j est $(R^{\mathbb{F}})|_{T_j}$-saturé) et nous avons $Y_j = (b_j|_{f(T_j)})^{-1}\pi(A) = (b_j|_{W_j})^{-1}\pi(A)$ (la première égalité est vérifiée car A est $\mathbb{F}$-saturé et la deuxième car $Y_j \subset W_j \subset f_j(T_j)$). Comme $(b_j|_{W_j})_{j\in J}$ est une liaison pour M dans $\mathfrak{T}$, $Y := \dot{\bigcup}_{j\in J} Y_j$ est R-saturé. Il s'en suit que $(p_j|_{Y_j})_{j\in J}$ est un pushout pour $(u_j|_{Z'} : Z' \longrightarrow Y_j)_{j\in J}$, où $Z' = u_1^{-1}(Y_1)$, dans $\mathfrak{K}^{\mathrm{fos}}$ et dans $\mathfrak{T}$. Il existe donc un unique morphisme $\alpha_1 : Y/(R|_Y) \longrightarrow A/(\mathbb{F}|_A)$ de $\mathfrak{T}$ tel que $\alpha_1 p_j|_{Y_j} = b_j|_{Y_j}$ pour tout $j \in J$.

D'autre part comme A est $\mathbb{F}$-saturé et $A \subset \bigcup_{j\in J} T_j$, $(b_j|_{Y_j})_{j\in J}$ est un pushout pour

$$\mathbb{M}' := \big((u_j^{j_1j_2}|_{\beta(T_{j_1j_2}\cap A)} : \beta(T_{j_1j_2}\cap A) \longrightarrow Y_j)_{j\in\{j_1,j_2\}}\big)_{(j_1,j_2)\in I}$$

dans $\mathfrak{T}$ $\big($propriété 5.2.3(e) de $\mathbb{M}(L,\mathfrak{U})\big)$. Il s'en suit qu'il existe un unique morphisme $\alpha_2 : A/(\mathbb{F}|_A) \longrightarrow Y/(R|_Y)$ de $\mathfrak{T}$ tel que $\alpha_2 b_j|_{Y_j} = p_j|_{Y_j}$ pour tout $j \in J$. Les quotients $A/(\mathbb{F}|_A)$ et $Y/(R|_Y)$ sont homéomorphes et $A/(\mathbb{F}|_A)$ est donc séparé.
Pour terminer la preuve de l'affirmation (a), il ne reste plus qu'à montrer que les feuilles de $\mathbb{F}|_A$ sont compactes (lemme 5.1.2). Soit L' une feuille de $\mathbb{F}|_A$. Nous avons alors les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} L' &= L' \cap \left(\bigcup_{j\in J} \overline{T}_j\right) \\ &= \bigcup_{j\in J} (L' \cap \overline{T}_j) \\ &= \bigcup_{j\in J} \Big(\big((\pi|_{U_j})^{-1}\big(\pi(L')\big)\big) \cap \overline{T}_j\Big) \\ &= \bigcup_{j\in J} \Big(\big(f_j^{-1} b_j^{-1}\big(\pi(L')\big)\big) \cap \overline{T}_j\Big) \\ &= \bigcup_{j\in J} (f_j|_{\overline{T}_j})^{-1} b_j^{-1}\big(\pi(L')\big) \\ &= \bigcup_{j\in J} (f_j|_{\overline{T}_j})^{-1} p_j^{-1}\big(\alpha_2\pi(L')\big). \end{aligned}$$

Comme pour tout $j \in J$, $p_j^{-1}\big(\alpha_2\pi(L')\big)$ est un ensemble fini (R^∞ est finie) et $f_j|_{\overline{T}_j}$ est propre ([Bou71, I§10.2 Corollaire 2]), L' est une réunion finie d'ensembles compacts donc un ensemble compact.

Soit (H, v) un germe d'holonomie de $\mathbb{M}(L,\mathfrak{U})$. Sans restriction de la généralité, nous avons $v = v_1$ et (H, v) est un germe d'holonomie de M_a. Soit H un représentant de (H, v) sur $V' \subset V_1$. Nous notons H_1 la relation d'holonomie de $(u_j|_{Z'})_{j\in J}$ sur Y_1 et nous avons $(H_1, v_1) = (H, v)$. Sans restriction de la généralité, comme R^∞ est propre, nous avons $Y_1 \subset V'$ et $H_1 = H|_{Y_1}$. Pour $y, y' \in Y_1$, nous avons $(y, y') \in \big((R|_Y)^\infty\big)|_{Y_1} = H_1^\infty$ si et seulement si $p_1(y) = p_1(y')$ et comme α_1 est un homéomorphisme, c'est le cas si et seulement si $b_1(y) = \alpha_1 p_1(y) = \alpha_1 p_1(y') = b_1(y')$,c'est-à-dire si et seulement si $f_1^{-1}(y)$ et $f_1^{-1}(y')$ se trouvent dans la même feuille. $\square$

5.3 Good set

Dans certains cas, une étude quantitative de la sinuosité autour d'une feuille compacte d'un feuilletage peut être faite par l'introduction de multiplicités sur les feuilles (voir [Ley84], [Mor01]). Pour un E-feuilletage, le fait de ne pas avoir de "compatibilité biholomorphe" entre les cartes nous empêche de "compter" et donc de définir ces multiplicités. Nous ne ferons donc qu'une étude qualitative de la sinuosité autour d'une feuille compacte.

Dans cette section, nous travaillerons avec un espace complexe X normal connexe à topologie dénombrable et un E-feuilletage $\mathbb{F}$ sur X.

5.3.1 Définitions *Pour une* $\mathbb{F}$*-carte* $f\colon U \longrightarrow V$ *avec une application feuille* $b\colon V \longrightarrow X/\mathbb{F}$*, nous définissons l'application suivante :*

$$\begin{array}{rrcl} \nu_f : & U & \to & \mathbb{N}\cup\{\infty\} \\ & x & \mapsto & \operatorname{Card} R^b\big(f(x)\big). \end{array}$$

Le ***good set*** *de* $\mathbb{F}$ *est l'ensemble*

$$G(\mathbb{F}) := \{x \in X : \text{ il existe une } \mathbb{F}\text{-carte } f\colon U \longrightarrow V \text{ avec } \nu_f \text{ bornée et } x \in U\}.$$

5.3.2 Remarques

(a) Si une $\mathbb{F}$-carte $f\colon U \longrightarrow V$ est la restriction d'une $\mathbb{F}$-carte définie sur un ensemble $U' \Subset X$ avec U relativement compact dans U' et si toutes les feuilles de $\mathbb{F}$ sont fermées dans X, alors il suit de la proposition 4.2.10 et du fait que U est relativement compact dans U', que R^b est quasi-finie et par conséquent que ν_f est à valeurs dans $\mathbb{N}$.

(b) Il découle directement de la définition du good set que celui-ci est un sous-ensemble ouvert de X.

5.3.3 Lemme *Soit* L *une feuille fermée de* $\mathbb{F}$*,* $x \in L$*,* $(T_i, f_i\colon U_i \longrightarrow V_i)$*,* $i = 1, 2$ *des couples* L*-admissibles avec* $x \in T_1$ *et* $L \cap T_{12} \neq \emptyset$*. Si* $\nu_{(f_1|_{T_1})}$ *est bornée, alors il existe un voisinage* $T_2' \Subset T_2$ *de* $L \cap T_2$ *tel que* $\nu_{(f_2|_{T_2'})}$ *soit bornée.*

Preuve Notons $b_i\colon V_i \longrightarrow X/\mathbb{F}$ l'application feuille correspondant à f_i, $i = 1, 2$. Soit $\beta_{12}\colon U_{12} \longrightarrow Z_{12}$ la base complexe de $f_1|_{U_{12}}$ et $u_i\colon Z_{12} \longrightarrow V_i$ des applications holomorphes ouvertes discrètes telles que le diagramme de la figures 5.2 commute

$$\begin{tikzcd}
 & U_{12} \arrow[dl, "f_1|_{U_{12}}"'] \arrow[d, "\beta_{12}"] \arrow[dr, "f_2|_{U_{12}}"] & \\
V_1 \arrow[dr, "b_1"'] & Z \arrow[l, "u_1"'] \arrow[r, "u_2"] & V_2 \arrow[dl, "b_2"] \\
 & X/\mathbb{F} &
\end{tikzcd}$$

FIG. 5.2: diagramme commutatif défini par les $\mathbb{F}$-cartes f_1, f_2

(le lemme 4.2.7 garantit l'existence de telles applications). L'ensemble T_{12} est relativement compact dans U_{12} donc $\beta_{12}(T_{12})$ est relativement compact dans Z_{12} et il s'en suit que $u_1|_{\beta_{12}(T_{12})}$ est quasi-finie. Il existe donc un voisinage T' de $u_1^{-1}\big(f_1(x)\big) \cap$

$\beta_{12}(T_{12})$ et un voisinage V_1' de $f_1(x)$ tel que $u_1|_{T'} : T' \longrightarrow V_1'$ soit ouverte finie et surjective (voir [KK83, 33 B.2]). Comme $u_1|_{T'}$ est un revêtement analytique (voir [GR84, 7§2.1]), il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Card}\left(u_1^{-1}(y) \cap T'\right) \leqslant N$. D'autre part, comme $\nu_{(f_1|_{T_1})}$ est bornée, il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Card}(b_1|_{f_1(T_1)})^{-1}b_1(v) \leqslant N'$ pour tout $v \in f_1(T_1)$. Pour tout $v \in u_2(T') =: V_2'$, nous avons $(b_2|_{V_2'})^{-1}b_2(v) = u_2(u_1|_{T'})^{-1}(b_1|_{V_1'})^{-1}b_2(v)$ (l'inclusion "$\subset$" est une conséquence de la surjectivité de $u_2|_{T'}$ et l'inclusion "$\supset$" une conséquence de la commutativité du diagramme 5.2) et donc $\mathrm{Card}(b_2|_{V_2'})^{-1}b_2(v) \leqslant N \cdot N'$. Nous posons alors $T_2' := f_2^{-1}(V_2') \cap T_2$ et T_2' est un voisinage de $L \cap T_2$ qui a la propriété désirée. $\square$

5.3.4 Théorème *Si toutes les feuilles de $\mathbb{F}$ sont fermées dans X, alors $G(\mathbb{F})$ est dense dans X et $\mathbb{F}$-saturé.*

Preuve Nous allons d'abord montrer que $G(\mathbb{F})$ est dense dans X. Soit $f : U \longrightarrow V$ une $\mathbb{F}$-carte qui est la restriction d'une $\mathbb{F}$-carte définie sur un ensemble $U' \Subset X$ avec U relativement compact dans U'. Notons $b : V \longrightarrow X/\mathbb{F}$, l'application feuille correspondant à f. Par la proposition 4.2.10, R^b est ouverte quasi-finie et très faiblement analytique. Il suit alors du lemme 2.2.5 que $C_{R^b} := \{y \in V : \nu_{R^b} \text{ est continue en } y\}$ est dense dans V. Nous avons donc $f^{-1}(C_{R^b}) \subset G(\mathbb{F})$ et comme f est continue, $f^{-1}(C_{R^b})$ est dense dans U.
Nous allons voir maintenant que $G(\mathbb{F})$ est $\mathbb{F}$-saturé. Soit L une feuille fermée de $\mathbb{F}$, $x \in L \cap G(\mathbb{F})$ et $y \in L$. Comme L est connexe par arc (lemme 4.1.25), il existe un chemin $\mathcal{T}_l$-continue $\gamma : [0,1] \longrightarrow L$. Comme L est fermée, pour tout $t \in [0,1]$, il existe un couple L-admissible (T, f) avec $\gamma(t) \in T$ (proposition 5.2.2). Nous pouvons donc trouver des couples L-admissibles $(T_i, f_i : U_i \longrightarrow V_i)$, $i = 1, \ldots, N$ tels que nous ayons les propriétés suivantes :

(a) $L \cap T_{i,i+1} \neq \emptyset$ pour $i = 1, \ldots, N-1$,

(b) $\nu_{(f_1|_{T_1})}$ est bornée,

(c) $y \in T_N$.

Il suit du lemme 5.3.3 que si pour $i \in \{2, \ldots, N\}$, l'application $\nu_{(f|_{T_{i-1}})}$ est bornée, alors il existe un voisinage T_i' de $T_i \cap L$ tel que $\nu_{(f_i|_{T_i'})}$ soit bornée. Nous pouvons donc construire un voisinage $T_N' \Subset T_N$ de $L \cap T_N$ tel que $\nu_{(f_N|_{T_N'})}$ soit bornée. Par conséquent y est un point de $G(\mathbb{F})$ et L est inclue dans $G(\mathbb{F})$. $\square$

5.3.5 Lemme *Soit L une feuille compacte de $\mathbb{F}$. Si $L \cap G(\mathbb{F}) \neq \emptyset$, alors il existe un recouvrement L-admissible $\mathfrak{U}$ tel que pour tout germe d'holonomie (H, v) de L par rapport à $\mathfrak{U}$, $(H, v)^\infty$ est stationnaire.*

Preuve Soit $x \in L \cap G(\mathbb{F})$. Il existe une $\mathbb{F}$-carte $f : U \longrightarrow V$ définie dans un voisinage de x avec ν_f bornée. En examinant la preuve de la proposition 5.2.2, nous remarquons qu'il est possible de trouver un recouvrement L-admissible $\mathfrak{U} = \left((T_j, f_j : U_j \longrightarrow V_j)\right)_{j \in J}$ avec $1 \in J$ et $f = f_1$. Pour $j \in J$, nous définissons $v_j := f_j(L \cap U_j)$, $g_j := f_j|_{T_j}$ et soit $b_j : V_j \longrightarrow X/\mathbb{F}$ l'application feuille correspondant à

f_j.
Soit $M_a := (u_{j,a}\colon Z_a \longrightarrow V_{j,v_j})_{j\in J}$ un mont $\mathfrak{T}_{\mathrm{g}}$-équivalent à $\mathbb{M}_g(L,\mathfrak{U})$. Comme $(b_{j,v_j})_{j\in J}$ est une liaison pour M_a, il existe un représentant 1-admissible $M := (u_j\colon Z \longrightarrow V'_j)_{j\in J}$ de M_a avec $V'_j \subset V_j$ connexe tel que $(b_j|_{V'_j})_{j\in J}$ soit une liaison pour M. Notons H_1 l'holonomie de M sur V'_1 et alors (H_1, v_1) est un germe d'holonomie de L par rapport à $\mathfrak{U}$. Comme ν_{f_1} est bornée, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\operatorname{Card} b_1^{-1}b_1(y) \leqslant N$ pour tout $y \in V$. Comme $(b_j|_{V'_j})_{j\in J}$ est une liaison pour M, $b_1|_{V'_1}$ est H_1-invariante (proposition 3.3.6 et lemme 3.3.11) et nous devons avoir $\operatorname{Card} H_1^\infty(y) \leqslant N$ pour tout $y \in V'_1$. Par le théorème 2.4.7, pour un voisinage $W \Subset V'_1$ de v_1 relativement compact dans V'_1, $H_1|_W$ est un représentant admissible de (H_1, v_1). Par le lemme 2.1.6, nous avons donc $(H_1|_W)^n = (H_1|_W)^N$ pour tout $n \geqslant N$ et par conséquent $(H_1, v_1)^n = (H_1, v_1)^N$ pour tout $n \geqslant N$. Donc $(H_1, v_1)^\infty$ est stationnaire et par la remarque 5.2.6, pour tout germe d'holonomie (H, v) de L par rapport à $\mathfrak{U}$ nous avons $(H, v)^\infty$ stationnaire. □

5.3.6 Théorème *Soit L une feuille compacte de $\mathbb{F}$. Si toutes les autres feuilles de $\mathbb{F}$ sont fermées, alors les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(i) *L est stable.*

(ii) *$L \cap G(\mathbb{F}) \neq \emptyset$.*

(iii) *Il existe un recouvrement L-admissible $\mathfrak{U}$ et un germe d'holonomie (H, v) de L par rapport à $\mathfrak{U}$ tel que $(H, v)^\infty$ soit stationnaire.*

(iv) *Pour tout recouvrement L-admissible $\mathfrak{U}$ et pour tout germe d'holonomie (H, v) de L par rapport à $\mathfrak{U}$, $(H, v)^\infty$ est stationnaire.*

Preuve "(i)⇔(iii) ⇔'(iv)" C'est le théorème 5.2.7.
"(iv)⇒(iii)" Trivial.
"(ii)⇒(iii)" C'est le lemme 5.3.5.
"(iii)⇒(ii)" Soit $\mathfrak{U}$ un recouvrement L-admissible de L, $(T, f\colon U \longrightarrow V)$ un membre de $\mathfrak{U}$, $b\colon V \longrightarrow X/\mathbb{F}$ l'application feuille de f et (H, v), $v := f(L \cap U)$, un germe d'holonomie de L par rapport à $\mathfrak{U}$ avec $(H, v)^\infty$ stationnaire. Par le théorème 2.4.12, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et un représentant admissible H sur $V' \subset V$ de (H, v) tels que $\operatorname{Card} H^\infty(x) \leqslant n_0$ pour tout $x \in V'$. Par la proposition 5.2.8, il existe un voisinage $W \subset V'$ de v tel que pour tout $y, y' \in W$ nous ayons $(y, y') \in (H|_W)^\infty$ si et seulement si $f^{-1}(y)$ et $f^{-1}(y')$ sont dans la même feuille (c'est-à-dire si $b(y) = b(y')$) donc $R^{b|_W} = (H|_W)^\infty$. Posons $g := f|_{f^{-1}(W)}\colon f^{-1}(W) \longrightarrow W$. Pour tout $x \in f^{-1}(W)$, nous avons alors

$$\nu_g(x) = \operatorname{Card}(H|_W)^\infty\big(g(x)\big) \leqslant \operatorname{Card} H^\infty\big(g(x)\big) \leqslant n_0.$$

ν_g est donc bornée et $g^{-1}(v) \subset L \cap g^{-1}(W) \subset G(\mathbb{F})$. □

5.3.7 Théorème *Si $\mathbb{F}$ est compact, alors les énoncés suivants sont équivalents :*

(i) *$\mathbb{F}$ est stable.*

(ii) *$X/\mathbb{F}$ est séparé.*

(iii) *$X/\mathbb{F}$ est un espace complexe.*

(iv) *$R^{\mathbb{F}}$ est analytique.*

(v) *$R^{\mathbb{F}}$ est propre.*

(vi) *Il existe une $\mathbb{F}$-carte globale.*

(vii) *Chaque feuille L de $\mathbb{F}$ possède un recouvrement L-admissible $\mathfrak{U}$ et un germe d'holonomie (H, v) de L par rapport à $\mathfrak{U}$ tels que $(H, v)^\infty$ soit stationnaire.*

(viii) *Pour toute feuille L de $\mathbb{F}$, pour tout recouvrement L-admissible $\mathfrak{U}$ de L et pour tout germe d'holonomie (H, v) par rapport à $\mathfrak{U}$, $(H, v)^\infty$ est stationnaire.*

(ix) *$G(\mathbb{F}) = X$.*

Preuve "(i)⇔(vii) ⇔(viii) ⇔(ix)" Ce sont les théorèmes 5.3.4 et 5.3.6.
"(ii)⇔(iii) ⇔(iv) ⇔ (vi)" C'est le théorème 4.3.1.
"(i)⇔(ii)" C'est le lemme 5.1.2.
"(i)⇔(v)" Voir [KK83, 33 B.4]. □

5.4 Application au cas de codimension 1

La stabilité des feuilletages holomorphes compacts de codimension 1 a été démontrée par Holmann et Kaup dans le cas où le feuilletage est un H-feuilletage (voir [Hol78] et [Kau78]) et par Holmann, Kaup et Reiffen dans le cas où le feuilletage est holomorphe cohérent et défini sur une variété complexe paracompacte (voir [HKR98]). Dans [Kau78], Kaup démontre la stabilité des H-feuilletages compacts de codimension 1 à l'aide de l'étude des groupes d'holonomie de ces feuilletages. Nous faisons un raisonnement analogue pour démontrer la stabilité des E-feuilletages compacts de codimension 1 en étudiant leurs germes d'holonomie.

5.4.1 Théorème *Si $\mathbb{F}$ est un E-feuilletage compact de codimension 1 sur un espace complexe normal avec une topologie dénombrable, alors $\mathbb{F}$ est stable et $X/\mathbb{F}$ est une surface de Riemann.*

Preuve Soit L une feuille de $\mathbb{F}$, $\mathfrak{U} = \big((T_j, f_j : U_j \longrightarrow V_j)\big)_{j\in J}$ un recouvrement L-admissible et $b_j : V_j \longrightarrow X/\mathbb{F}$ l'application feuille correspondant à f_j, $j \in J$. Pour $j \in J$, nous définissons $v_j := f_j(L \cap U_j)$. Soit $(u_{j,a} : Z_a \longrightarrow V_{j,v_j})_{j\in J}$ un mont dans $\mathfrak{K}_{\mathrm{g}}^{\mathrm{do}}$ qui est $\mathfrak{T}_{\mathrm{g}}$-équivalent à $\mathbb{M}_g(L, \mathfrak{U})$ (l'existence d'un tel mont est garantie par le corollaire 3.2.15). Pour $j_0 \in J$, nous pouvons trouver un représentant j_0-admissible $M := (u_j : Z \longrightarrow V_j')_{j\in J}$ avec $V_j' \subset f_j(V_j)$ pour tout $j \in J$, tel que $(b_j|_{V_j'})_{j\in J}$ soit une liaison pour M dans $\mathfrak{S}$ et tel que V_{j_0}' soit biholomorphe à un voisinage de $0 \in \mathbb{C}$ (les vallées de $\mathbb{M}(L, \mathfrak{U})$ sont des espaces complexes normaux de dimension 1 donc des surfaces de Riemann, voir [KK83, 74.4]). Notons H la relation d'holonomie de M sur V_{j_0}'. Par le corollaire 3.3.6 et le lemme 3.3.11(b), nous avons $H^\infty \subset R^{b_{j_0}|_{V_{j_0}'}}$.

Il suit de la propriété 5.2.3(d) de $\mathbb{M}(L, \mathfrak{U})$ que $R^{b_{j_0}}$ est quasi-finie et par conséquent H^∞ l'est aussi. Par le théorème 2.3.4, il existe un voisinage $V''_{j_0} \subset V'_{j_0}$ de v_{j_0} tel que $(H|_{V''_{j_0}})^\infty$ soit analytique. $(H, v_{j_0})^\infty$ est alors stationnaire (théorème 2.4.12) et par le théorème 5.2.7, L est stable. □

5.4.2 Corollaire *Si $\mathbb{F}$ est un feuilletage compact holomorphe cohérent de codimension 1 sur une variété complexe X avec une topologie dénombrable, alors $\mathbb{F}$ est stable et $X/\mathbb{F}$ est une surface de Riemann.*

Preuve Comme $\mathbb{F}$ est compact de codimension 1, par le théorème de Mattei-Moussu (voir [MM80]), $\mathbb{F}$ est localement intégrable. Il suit alors de la remarque 4.2.2(vi) que $\mathbb{F}$ est un E-feuilletage compact de codimension 1. □

Chapitre 6

Appendice : preuve du théorème de Holmann-Egger

La formulation du théorème de Holmann-Egger (voir 2.2.2) que nous avons donnée est due a Reiffen. La preuve présentée ici est essentiellement celle proposée par Egger dans le cas où R est une relation sur X (voir [Egg80, 3.4]). Plusieurs adaptations et ajouts y ont été faits afin de pouvoir démontrer un critère d'analycité plus générale et d'améliorer la lisibilité de la démonstration de Egger. Il faut noter que le preuve de Egger s'inspire fortement de celle faite par Holmann pour une relation faiblement analytique (voir [Hol63, Hilfsatz 6]).

6.1 Préparations

Nous pouvons supposer que X est connexe $\big($si ce n'est pas le cas, nous montrons alors pour chaque composante connexe X' de X que l'ensemble $R \cap f^{-1}(X')$ est analytique dans $f^{-1}(X')\big)$.

6.1.1 Affirmation *R est fermé dans Y.*

Preuve Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans R qui converge vers un point $y \in Y$. $\big(f(y_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite qui converge vers $f(y)$. Comme F est finie, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite dans le compact $F^{-1}\Big(\big\{f(y_n) : n \in \mathbb{N}\big\} \cup f(y)\Big) \subset R$ et $y \in R$. $\square$

6.1.2 Affirmation et notation *Pour tout $y \in Y$, il existe un ensemble $A \subset R$ localement analytique dans Y contenant y et arbitrairement petit avec les propriétés suivantes :*

(a) $f|_A : A \longrightarrow f(A) \Subset X$ *est ouverte et finie,*

(b) *A est irréductible de dimension* $\dim X$*,*

(c) *A est analytique dans* $R^f(A) = f^{-1}f(A) \Subset Y$.

Si A a toutes ces propriétés, nous dirons que A a la propriété ($\blacktriangle$).

Preuve Par hypothèse sur R, pour tout $y \in Y$, il existe un ensemble $A \subset R$ localement analytique dans Y contenant y tel que $f|_A : A \longrightarrow X$ soit ouverte. Il est clair que A peut être choisi arbitrairement petit. $f|_A$ étant ouverte, X localement irréductible connexe et F finie, A est de dimension pure $\dim X$. Comme F est discrète, nous pouvons choisir un ensemble A qui soit en plus irréductible et tel que l'application $f|_A : A \longrightarrow f(A) \Subset X$ soit finie.
Nous allons montrer que A est fermé, et par conséquent analytique, dans $R^f(A)$. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans A qui converge vers un point $a \in R^f(A)$, c'est-à-dire avec $f(a) \in f(A)$. L'ensemble $B := \{f(a_n) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{f(a)\}$ est compact dans $f(A)$. Comme $f|_A : A \longrightarrow f(A)$ est propre, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans le compact $(f|_A)^{-1}(B) \subset A$ et par conséquent $a \in A$. $\square$

Nous définissons l'ensemble $M_p := \{x \in X : \operatorname{Card} F^{-1}(x) \leqslant p\}$.

6.1.3 Affirmation *Pour tout $p \in \mathbb{N}$, M_p est fermé dans X.*

Preuve Soit $x \in X \setminus M_p$, donc $\operatorname{Card} F^{-1}(x) =: p' > p$. Posons $F^{-1}(x) = \{y_1, \dots, y_{p'}\}$. Soit $U_k \Subset Y$ un voisinage de y_k, $k = 1, \dots, p'$. Nous choisissons les U_k suffisamment petits pour qu'ils soient disjoints. $V := \bigcap_{k=1}^{p'} F(U_k \cap R)$ est un voisinage ouvert de x (car F est ouverte) et pour tout $x' \in V$, nous avons $\operatorname{Card} F^{-1}(x') \geqslant p'$, donc $V \subset X \setminus M_p$. $\square$

6.1.4 Affirmation *Il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\overset{\circ}{M}_p \neq \emptyset$.*

Preuve Comme F est finie, nous avons $X = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} M_p$. Par le théorème de Baire, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\overset{\circ}{M}_p \neq \emptyset$. $\square$

Pour démontrer notre théorème, nous allons successivement démontrer les deux affirmations suivantes :

6.1.5 Affirmation *Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $R \cap f^{-1}(\overset{\circ}{M}_p)$ est analytique dans $f^{-1}(\overset{\circ}{M}_p)$.*

6.1.6 Affirmation *Il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que* $\operatorname{Card} F^{-1}(x) \leqslant p_0$ *pour tout $x \in X$.*

La démonstration de l'affirmation 6.1.6 termine la preuve du théorème car elle implique l'existence d'un p_0 tel que $M_{p_0} = X$ et par l'affirmation 6.1.5, $R \cap f^{-1}(\overset{\circ}{M}_{p_0}) = R$ est analytique dans $f^{-1}(\overset{\circ}{M}_{p_0}) = Y$.

6.2 Preuve de l'affirmation 6.1.5

Pour $i, p \in \mathbb{N}$, $i \leqslant p$, nous définissons $N_{p,i} := \overset{\circ}{M}_p \setminus M_{p-i}$. Nous avons $N_{p,i} \Subset \overset{\circ}{M}_p$ et pour tout $x \in N_{p,i}$ nous avons $p - i < \operatorname{Card} F^{-1}(x) \leqslant p$.

Soit $p \in \mathbb{N}$ fixé. Nous allons démontrer par induction que pour $1 \leqslant i \leqslant p$, $R \cap f^{-1}(N_{p,i})$ est analytique dans $f^{-1}(N_{p,i})$. Comme $N_{p,p} = \overset{\circ}{M}_p$, ceci termine la preuve de l'affirmation 6.1.5.

Nous allons d'abord voir que $R \cap f^{-1}(N_{p,1})$ est analytique dans $f^{-1}(N_{p,1})$. Soit $x \in N_{p,1}$. Par définition de $N_{p,1}$, nous avons $\operatorname{Card} F^{-1}(x) = p$. Posons $F^{-1}(x) = \{y_1, \ldots, y_p\}$. Pour $k = 1, \ldots, p$, il existe des ensembles localement analytiques disjoints $A_k \subset R$ contenant le point y_k et avec la propriété ($\blacktriangle$). Nous pouvons supposer que $f(A_k) = U \Subset N_{p,1}$ pour tout k. Comme les A_k sont disjoints et comme $U \subset N_{p,1}$, pour tout point $y \in U$, nous avons $\operatorname{Card}(f^{-1}(y) \cap A_k) = 1$ pour $k = 1, \ldots, p$. Par conséquent, comme les A_k ont la propriété ($\blacktriangle$) et comme $R^f(A_k) = f^{-1}(U)$ pour $k = 1, \ldots, p$, l'ensemble $R \cap f^{-1}(U) = \bigcup_{k=1}^p A_k$ est analytique dans $f^{-1}(U)$ et $R \cap f^{-1}(N_{p,1})$ est donc analytique dans $f^{-1}(N_{p,1})$.

Nous allons maintenant montrer que si $R \cap f^{-1}(N_{p,i})$ est analytique dans $f^{-1}(N_{p,i})$, $i < p$, alors $R \cap f^{-1}(N_{p,i+1})$ est analytique dans $f^{-1}(N_{p,i+1})$. Nous avons $N_{p,i} \Subset N_{p,i+1} \Subset \overset{\circ}{M}_p$. Soit $x \in N_{p,i+1} \smallsetminus N_{p,i}$. Par définition de $N_{p,i+1}$ et $N_{p,i}$, nous avons $\operatorname{Card} F^{-1}(x) = p - i$. Posons $F^{-1}(x) = \{y_1, \ldots, y_{p-i}\}$. Pour $k = 1, \ldots, p - i$, il existe des ensembles localement analytiques disjoints $A_k \subset R$ contenant y_k et avec la propriété ($\blacktriangle$). De plus, nous pouvons supposer que $F(A_k) = U$ pour tout k, avec $U \Subset N_{p,i+1}$.

Si $x \notin \partial N_{p,i}$, sans restriction de la généralité, nous avons $U \cap N_{p,i} = \emptyset$. Il s'en suit que $R \cap f^{-1}(U) = \bigcup_{k=1}^{p-i} A_k$ et $R \cap f^{-1}(U)$ est donc analytique dans $f^{-1}(U) \subset f^{-1}(N_{p,i+1})$.

Considérons maintenant le cas où $x \in \partial N_{p,i}$. Posons $V := f^{-1}(U) \smallsetminus \bigcup_{k=1}^{p-i} A_k \Subset Y$. Si $R \cap V = \emptyset$ alors $R \cap f^{-1}(U) = \bigcup_{k=1}^{p-i} A_k$. Donc R est analytique dans un voisinage de $f^{-1}(x) \cap R$. Sinon, nous posons $S := R \cap V \Subset R$. Nous avons $F(S) \Subset N_{p,i}$ (car pour tout $x' \in F(S)$ et pour $k = 1, \ldots p - i$, nous avons $F^{-1}(x') \cap A_k \neq \emptyset$ et $F^{-1}(x') \cap S \neq \emptyset$, donc $\operatorname{Card} F^{-1}(x') > p - i$) donc $S \subset R \cap f^{-1}(N_{p,i})$. Comme $R \cap f^{-1}(N_{p,i})$ est analytique dans $f^{-1}(N_{p,i})$, S est localement analytique dans Y. L'ensemble R étant fermé (affirmation 6.1.1), S est fermé et donc analytique dans V.

Comme X est irréductible et $F|_S$ ouverte et discrète, S est un sous-ensemble analytique de V de dimension pure $\dim X$ (voir [KK83, 49.16]). Nous allons montrer que $\hat{S} := \operatorname{Ad}_{f^{-1}(U)}(S)$ est analytique dans $f^{-1}(U)$. Supposons le contraire. Par le théorème de Remmert-Stein-Thullen (voir [Abh64, 44.43]), $\hat{S}$ doit contenir un des A_k. D'autre part, il existe un point $a \in f(S) \Subset U$ avec $d := \operatorname{Card}\big(F^{-1}(a) \cap S\big) \leqslant p$ soit maximale. Soit $U(a) \subset F(S)$ un voisinage ouvert de a tel que $f^{-1}\big(U(a)\big) \cap S = \bigcup_{j=1}^d S_j$, où les S_j sont des sous-ensembles analytiques irréductibles de $f^{-1}\big(U(a)\big)$ qui sont disjoints. $f^{-1}\big(U(a)\big) \cap S$ est donc un sous-ensemble fermé de $f^{-1}\big(U(a)\big)$ et par conséquent $\hat{S}$ ne peut contenir aucun des A_k : une contradiction. $\hat{S}$ est donc analytique dans $f^{-1}(U)$ et s'en suit que

$$R \cap f^{-1}(U) = \left(\bigcup_{k=1}^{p-i} A_k\right) \cup S = \left(\bigcup_{k=1}^{p-i} A_k\right) \cup \hat{S}$$

est analytique dans $f^{-1}(U)$. R est donc analytique dans un voisinage de $F^{-1}(x)$.

6.3 Preuve de l'affirmation 6.1.6

Comme les M_p sont fermés, nous pouvons supposer que X est une variété complexe connexe.

Supposons qu'il n'existe pas de $p \in \mathbb{N}$ tel que $\operatorname{Card} F^{-1}(x) \leqslant p$ pour tout $x \in X$. Nous allons construire une suite d'entiers $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une suite d'ensembles non vides $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec les propriétés suivantes :

(a) pour tout $n > 0$, $p_n > p_{n-1}$,

(b) pour tout $n > 0$, Ω_n est ouvert connexe relativement compact dans Ω_{n-1},

(c) pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \overline{\Omega_n}$, $\operatorname{Card} F^{-1}(x) \geqslant p_n$,

(d) pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$, nous avons $\Omega_n \not\subset M_p$.

Si nous pouvons construire de telles suites, l'intersection $D := \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\Omega_n}$ est alors non vide et pour tout $x \in D$, nous avons $\operatorname{Card} F^{-1}(x) = \infty$: une contradiction car F est finie.

Nous posons $\Omega_0 := X$ et $p_0 := 1$. Comme F est surjective, pour tout $x \in \overline{\Omega}_0$, nous avons $\operatorname{Card} F^{-1}(x) \geqslant 1$. D'autre part, nous avons supposé qu'il n'existe pas de $p \in \mathbb{N}$ tel que $\operatorname{Card} F^{-1}(x) \leqslant p$ pour tout $x \in X$, donc pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\Omega_0 \not\subset M_p$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Nous supposons maintenant que nous avons un nombre p_{n-1} et un ensemble Ω_{n-1} avec $\operatorname{Card} F^{-1}(x) \geqslant p_{n-1}$ pour tout $x \in \overline{\Omega_{n-1}}$ et $\Omega_{n-1} \not\subset M_p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Nous allons montrer que nous pouvons trouver un nombre p_n et un ensemble Ω_n avec les propriétés suivantes :

(a) $p_n > p_{n-1}$,

(b) Ω_n est non vide ouvert connexe relativement compact dans Ω_{n-1},

(c) $\operatorname{Card} F^{-1}(x) \geqslant p_n$ pour tout $x \in \overline{\Omega_n}$,

(d) $\Omega_n \not\subset M_p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Choisissons d'abord p_n. Nous posons

$$\Omega'_{n-1} := \Omega_{n-1} \setminus M_{p_{n-1}} = \{x \in \Omega_{n-1} : \operatorname{Card} F^{-1}(x) > p_{n-1}\}.$$

Ω'_{n-1} est ouvert dans X car $M_{p_{n-1}}$ est fermé et est non-vide car Ω_{n-1} n'est inclu dans aucun M_p. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $M_p \cap \Omega'_{n-1}$ est fermé dans Ω'_{n-1} et comme F est finie, nous avons $\Omega'_{n-1} := \bigcup_{p\in\mathbb{N}}(M_p \cap \Omega'_{n-1})$. Par le théorème de Baire, il existe un nombre

p_n tel que $\mathring{M}_{p_n} \cap \Omega'_{n-1} \neq \emptyset$. Nous choisissons p_n minimal. Comme $M_{p_{n-1}} \cap \Omega'_{n-1} = \emptyset$, nous avons $p_n > p_{n-1}$.

Voici les étapes de la construction de Ω_n :

(1) choix d'une composante connexe M de $\mathring{M}_{p_n} \cap \Omega_{n-1}$ telle qu'il existe $x_0 \in M$ avec $\mathrm{Card}\, F^{-1}(x_0) = p_n$,

(2) existence d'un point $x_1 \in \Omega_{n-1} \cap \partial M$ avec $\mathrm{Card}\, F^{-1}(x_1) = p_n$,

(3) choix d'un voisinage convenable de x_1 et ce voisinage sera l'ensemble Ω_n recherché.

Construction de Ω_n, partie (1)

Soit M' une composante connexe de $\mathring{M}_{p_n} \cap \Omega'_{n-1}$ et $x \in M'$. Nous allons voir que la composante connexe de $\mathring{M}_{p_n} \cap \Omega_{n-1}$ contenant M' a la propriété désirée. Si $\mathrm{Card}\, F^{-1}(x) = p_n$, nous choisissons $x_0 := x$. Sinon $\mathrm{Card}\, F^{-1}(x) < p_n$ et x est un élément de M_{p_n-1}. Comme $x \notin \mathring{M}_{p_n-1}$ (car $\mathring{M}_{p_n-1} \cap \Omega'_{n-1} = \emptyset$), nous avons $x \in \partial M_{p_n-1}$. L'ensemble M' étant un voisinage de x, il existe $x_0 \in M' \setminus M_{p_n-1}$ et comme $M' \subset \mathring{M}_{p_n}$, nous avons $\mathrm{Card}\, F^{-1}(x_0) = p_n$.

Construction de Ω_n, partie (2)

M est inclu dans Ω_{n-1} mais Ω_{n-1} n'est pas inclu dans M car $M \subset \mathring{M}_{p_n}$ (nous aurions une contradiction, car par hypothèse sur Ω_{n-1}, nous avons $\Omega_{n-1} \not\subset M_{p_n}$). Comme M et Ω_{n-1} sont connexes, il s'en suit que $\Omega_{n-1} \cap \partial M \neq \emptyset$.

6.3.1 Affirmation *Si $U \Subset \Omega_{n-1}$ est un ouvert connexe avec $U \cap \partial M \neq \emptyset$ alors $U \not\subset M_p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.*

Preuve Supposons qu'il existe $q \in \mathbb{N}$ avec $U \subset M_q$. L'ensemble $U \cup M$ est un ouvert connexe de X et l'ensemble $F^{-1}(U \cup M) = R \cap f^{-1}(U \cup M)$ est analytique donc $F|_{F^{-1}(U \cup M)} : F^{-1}(U \cup M) \longrightarrow U \cup M$ est un revêtement analytique à p feuillets. Comme M est inclu dans M_{p_n}, nous devons avoir $p \leqslant p_n$ et par la partie (1) de la construction de Ω_n, $p > p_n$ donc $p = p_n$. Il s'en suit que $U \cup M \subset M_{p_n}$ et donc que $U \subset \mathring{M}_{p_n} \cap \Omega_{n-1}$. Comme U est connexe, U est inclu dans M : une contradiction. □

Nous choisissons $x_1 \in \Omega_{n-1} \cap \partial M$ avec $\mathrm{Card}\, F^{-1}(x_1) =: q$ maximale. Nous avons $q \leqslant p_n$ car $\overline{M} \subset M_{p_n}$. Posons $F^{-1}(x_1) = \{y_1, \ldots, y_q\}$. Nous allons démontrer que $q = p_n$.

Il existe des ensembles localement analytiques disjoints $A_k \subset R$ contenant y_k avec la propriété (▲) pour $k = 1, \ldots, q$. Nous pouvons choisir ces ensembles de façon à ce que $F\big(A_k\big) = U(x_1)$ pour tout k, où $U(x_1)$ est un voisinage de x_1 ouvert connexe relativement compact dans Ω_{n-1} et indépendant de k. Nous définissons les ensembles

$$V := f^{-1}\big(U(x_1)\big) \smallsetminus A, \quad S := R \cap f^{-1}(M) \cap V,$$

avec $A := \bigcup_{k=1}^{q} A_k$.

6.3.2 Affirmation *S est analytique dans V et de dimension* $\dim X$ *ou vide* .

Preuve Par l'affirmation 6.1.5, $R \cap f^{-1}(M)$ est analytique dans $f^{-1}(M)$. L'ensemble S est donc localement analytique dans V et si S est non vide, alors S est de dimension $\dim X$ (car F est finie et ouverte) et il suffit donc de montrer que S est fermé dans V. Soit $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite dans S qui converge vers $a \in V$. Comme R est fermé dans Y (affirmation 6.1.1), nous avons $a \in R$. La suite $\big(f(a_m)\big)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite dans M. Donc si nous montrons que $f(a)$ est dans M la preuve est terminée. Nous avons $f(a) \in U(x_1)$ et comme $F(A_k) = U(x_1)$ pour tout k, il existe pour chaque k un point $b_k \in A_k$ avec $f(b_k) = f(a)$. Comme $a \notin A$, comme les A_k sont disjoints et comme $\{a, b_1, \ldots, b_q\} \subset F^{-1}f(a)$, nous avons $\operatorname{Card} F^{-1}f(a) > q$. Par le choix de x_1, nous devons donc avoir $f(a) \in M$. □

6.3.3 Affirmation *S est vide.*

Preuve Supposons $S \neq \emptyset$. Il suit du théorème de Remmert-Stein-Thullen que $\hat{S} := \operatorname{Ad}_{f^{-1}(U(x_1))}(S)$ est analytique dans $f^{-1}\big(U(x_1)\big)$ (même raisonnement que dans la preuve de l'affirmation 6.1.5). L'ensemble $\hat{S}$ étant fermé et inclu dans $R \cap \big(f^{-1}\big(U(x_1)\big)\big)$ et F étant fini, $f|_{\hat{S}} = F|_{\hat{S}} : \hat{S} \longrightarrow U(x_1)$ est une application holomorphe finie. Par conséquent, $F(\hat{S})$ est un sous-ensemble analytique de $U(x_1)$. D'autre part, $F(S) \subset F(\hat{S})$ est ouvert dans $U(x_1)$ car F est ouverte. S étant non vide, X étant localement irréductible et $U(x_1)$ étant connexe, nous devons avoir $F(\hat{S}) = U(x_1)$.
Comme $F(\hat{S})$ est inclu dans $\overline{M}$ et $U(x_1) \smallsetminus \overline{M} \neq \emptyset$ (conséquence de l'affirmation 6.3.1 car $\overline{M} \subset M_{p_n}$), nous avons $F(\hat{S}) \neq U(x_1)$: une contradiction. □

6.3.4 Affirmation $q = p_n$.

Preuve Comme $S = \emptyset$, nous avons

$$R \cap f^{-1}\big(U(x_1) \cap M\big) = A \cap f^{-1}\big(U(x_1) \cap M\big). \tag{6.1}$$

Comme $U(x_1) \cap M$ est connexe et $F^{-1}(M)$ est analytique dans Y, $f|_{F^{-1}(M)} : F^{-1}(M) \longrightarrow M$ est un revêtement analytique à q' feuillets, $q' \leqslant p_n$ car $M \subset M_{p_n}$. Par le choix de M, il existe $x_0 \in M$ avec $\operatorname{Card} F^{-1}(x_0) = p_n$ et par conséquent $q' = p_n$.
$f|_A : A \longrightarrow U(x_1)$ est un revêtement analytique à q'' feuillets. Comme $f|_{F^{-1}(M)}$ est un revêtement à p_n feuillets, il suit de l'équation 6.1 que $q'' = p_n$. Il existe donc un point $x \in U(x_1) \cap \partial M \subset \Omega_{n-1} \cap \partial M$ avec $\operatorname{Card}(f|_A)^{-1}(x) = p_n$ et par le choix de x_1, nous devons avoir $q = p_n$. □

Construction de Ω_n, partie (3)

Nous choisissons pour Ω_n un voisinage ouvert connexe relativement compact dans $U(x_1)$ de x_1. Comme $F\big(A_k\big) = U(x_1),\ k = 1, \ldots, p_n$ et comme les A_k sont disjoints, pour tout $x \in \overline{\Omega}_n \subset U(x_1)$, nous avons $\operatorname{Card} F^{-1}(x) \geqslant p_n$ et a par l'affirmation 6.3.1, $\Omega_n \not\subset M_p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Bibliographie

[Abh64] Abhyankar, S. S. *Local analytic geometry.* Academic Press, 1964.

[AH35] Alexandroff, P., & Hopf, H. *Topologie.* Springer, 1935.

[AHS90] Adámek, J., Herrlich, H., & Strecker, G. *Abstract and concrete categories.* Wiley, 1990.

[BB72] Baum, P., & Bott, R. Singularities of Holomorphic Foliations. *Journ. Diff. Geo.*, 7 :279–342, 1972.

[Bou71] Bourbaki, N. *Topologie Générale.* Hermann, 1971.

[BR85] Bohnhorst, G., & Reiffen, H.-J. Holomorphe Blätterungen mit Singularitäten. *Math. Gottingensis, Schriftenreihe des Sonderforschungsbereichs Geometrie und Analysis*, Heft 5, 1985.

[BR90] Bohnhorst, G., & Reiffen, H.-J. Über offene analytische Äquivalenzrelationen auf komplexen Räumen. *Osnabrücker Schriften zur Mathematik, Reihe P*, Heft 130, 1990.

[Egg80] Egger, T. *Beschreibung holomorpher Blätterungen durch Relationen.* Inaugural-Dissertation. Math. Inst. Uni. Freiburg, Switzerland, 1980.

[EMS77] Edwards, R., Millett, K., & Sullivan, D. Foliations with all leaves compact. *Topology*, 16 :265–282, 1977.

[Eps76] Epstein, D. B. A. Foliations with all leaves compact. *Ann. Inst. Fourrier*, 26 :265–282, 1976.

[EV78] Epstein, D. B. A., & Vogt, E. A counterexample to the Periodic Orbit Conjecture in codimension 3. *Ann. of Math.*, pages 539–552, 1978.

[GR65] Gunning, R. C., & Rossi, H. *Analytic Functions of several complex Variables.* Prentice-Hall, 1965.

[GR84] Grauert, H., & Remmert, R. *Coherent Analytic Sheaves.* number 265 in Grundlehren der matematischen Wissenschaften. Springer, 1984.

[HKR98] Holmann, H., Kaup, B., & Reiffen, H.-J. Stability of Holomorphic Foliations with Singularities and Analytic Leaf Spaces. *Seminarberichte aus dem Fachbereich Mathematik (Fern Universität Hagen)*, 63 :341–357, 1998.

[HKR02] Holmann, H., Kaup, B., & Reiffen, H.-J. Stability of 1-codimentional Analytic Decompositions. *En préparation*, 2002.

[Hol63] Holmann, H. Komplexe Räumen mit komplexen Transformationsgruppen. *Math. Ann.*, 150 :327–360, 1963.

[Hol72] Holmann, H. Holomorphe Blätterungen komplexer Räume. *Comm. Math. Helv.*, 47 :185–204, 1972.

[Hol78] Holmann, H. On the stability of holomorphic foliations with all leaves compact. In *Variétés Analytiques Compactes*, volume 683 of *Lect. Not. Math*, pages 217–246. Colloque de Nice 1977, 1978.

[Kau71] Kaup, B. Relationen auf komplexen Räumen. *Comm. Math. Helv.*, 46 :48–64, 1971.

[Kau75] Kaup, B. Zur Konstruktion komplexer Basen. *manuscripta math.*, 15 :385–408, 1975.

[Kau78] Kaup, B. Ein geometrishes Endlichkeitskriterium für Untergruppen von Aut($\mathbb{C}$,0) und holomorphe 1-codimensionale Blätterungen. *Comm. Math. Helv.*, 53 :295–299, 1978.

[KK83] Kaup, L., & Kaup, B. *Holomorphic Functions of Several Variables*, volume 3 of *de Gruyter Studies in Mathematics*. de Gruyter, 1983.

[Ley84] Leymann, F. *Blätterungen von Raümen mit Singularitäten*. Dissertation. Ruhr-Universität, Bochum, 1984.

[MM80] Mattei, J.-F., & Moussu, R. Holonomie et intégrales premières. *Ann. Sc. Ec. Norm. Sup.*, 13 :469–523, 1980.

[Mor01] Morel, D. *On the leaf space of singular holomorphic foliations and multiplicities on leaves*. Thesis. Dept. Math. Uni. Fribourg, Switzerland, 2001.

[Mue79] Mueller, T. Beispiel einer periodishen instabilen holomorphen Strömung. *Enseignement Math.*, XXV :309–312, 1979.

[Ree52] Reeb, G. Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées. *Act. Sci. et Ind.*, 1183, 1952.

[Rei82] Reiffen, H.-J. Einfache holomorphe Funktionen. *Math. Ann.*, 259 :99–106, 1982.

[Rei87] Reiffen, H.-J. Leaf Spaces and Integrability. *Osnabrücker Schriften zur Mathematik, Reihe P*, 99, 1987.

[Rei97] Reiffen, H.-J. Rings of Primitives and Factorizing Integrals for Singular Holomorphic Foliations. Report 1/1997, Math. Inst. Uni. Fribourg (http ://www.unifr.ch/math/reports.html), 1997.

[Vog76] Vogt, E. Foliations of codimension 2 with all leaves compact. *manuscripta math.*, 18 :187–212, 1976.

Liste des notations

Δ_X	relation d'équivalence triviale sur X (p. **9**)
Id_X	identité sur X (p. **9**)
R^f	relation d'équivalence induite par l'application f (p. **9**)
A_{ij}	intersection des ensembles A_i et A_j (p. **9**)
$C_a(X)$	composante connexe de X contenant le point a (p. **9**)
$\mathrm{Ad}_B(A)$	adhérence de A dans B (p. **9**)
X_a	germe de l'espace topologique X au point $a \in X$ (p. **9**)
f_a	germe de l'application f au point a (p. **9**)
$\mathrm{Sing}\, X$	ensemble des singularité de l'espace complexe X (p. **9**)
${}_X\mathcal{O}, {}_X\Omega, {}_X\Theta$	faisceaux des fonctions holomorphes, des formes différentielles holomorphes et des champs vectoriels holomorphes sur X (p. **9**)
$\widetilde{\mathcal{G}}$	complétion du sous-faisceau $\mathcal{G}$ de ${}_X\Omega$ (p. **9**)
$X_1 \amalg X_2$	coproduit de X_1 et X_2 (p. **12**)
$p_R, q_R \colon R \longrightarrow X$	projections canoniques sur la première et sur la deuxième composante, avec $R \subset X \times X$ (p. **13**)
$R(U)$	ensemble des points mis en relation avec les points de l'ensemble U par la relation R (p. **13**)
$R(x)$	ensemble des points mis en relation avec le point x par la relation R (p. **13**)
$R\vert_Y$	restriction de la relation R sur l'ensemble Y (p. **13**)

$R \circ S$	composition des relations R et S (p. **14**)
R^n	$n^{\text{ème}}$ itération de la relation R (p. **14**)
R^∞	relation d'équivalence induite par la relation R (p. **14**)
X/R	quotient de X par la relation d'équivalence engendrée par la relation R (p. **14**)
$\nu_R : X \longrightarrow \mathbb{N}$	$\nu_R(x) := \operatorname{Card} R(x)$ (p. **19**)
(R, a)	germe de la relation R au point (a, a) (p. **28**)
$(R, a) \cup (S, a)$	union des germes (R, a) et (S, a) (p. **28**)
$(R, a) \circ (S, a)$	composition des germes (R, a) et (S, a) (p. **29**)
$(R, a)^n$	$n^{\text{ème}}$ itération du germe (R, a) (p. **29**)
$(R, a)^\infty$	suite formée par les itérations de (R, a) (p. **31**)
$\mathbb{M}_1 \cup \mathbb{M}_2$	union des massifs $\mathbb{M}_1$ et $\mathbb{M}_2$ (p. **36**)
$\mathbb{M} \setminus \mathbb{M}'$	complément du massif $\mathbb{M}'$ dans $\mathbb{M}$ (p. **36**)
$\Gamma_{\mathbb{M}}$	graphe défini par le massif $\mathbb{M}$ (p. **37**)
$X_1 \times_{Y_2} \ldots \times_{Y_{N-1}} X_{N-1}$	produit fibré de $X_1, \ldots, X_{N-1}$ (p. **40**)
$\operatorname{Sing} \mathbb{F}$, X^{reg}	ensemble des singularités du feuilletage $\mathbb{F}$, partie régulière de $\mathbb{F}$ (p. **58**)
$\dim_{X'} \mathbb{F}, \dim \mathbb{F}$	dimension du feuilletage $\mathbb{F}$ sur la composante irréductible X', dimension du feuilletage $\mathbb{F}$ (p. **58**)
$\Omega^{\mathbb{F}}$	faisceau de formes défini par le feuilletage $\mathbb{F}$ (p. **58**)
X^ρ	ensemble des $\mathbb{F}$-points d'un feuilletage $\mathbb{F}$. (p. **59**)
$\mathcal{T}_i, \mathcal{T}_l$	topologie induite par l'espace ambiant, topologie feuille (p. **59**)
$R^{\mathbb{F}}$	relation d'équivalence définie par les feuilles du feuilletage $\mathbb{F}$ (p. **60**)
$X/\mathbb{F}$	espace des feuilles (p. **60**)
$\mathbb{F}^f$	feuilletage définie par l'application f (p. **61**)
$\mathbb{M}(L, \mathfrak{U})$	massif dans $\mathfrak{K}^{\text{do}}$ définit par le recouvrement L-admissible $\mathfrak{U}$ (p. **70**)

$\mathbb{M}_g(L, \mathfrak{U})$	massif dans $\mathfrak{K}_{\mathrm{g}}^{\mathrm{do}}$ défini par le recouvrement L-admissible $\mathfrak{U}$ (p. **71**)
$\nu_f : U \longrightarrow \mathbb{N}$	$\nu_f(x) := \mathrm{Card}\, R^b\big(f(x)\big)$, où b est l'application feuille correspondant à la $\mathbb{F}$-carte f (p. **77**)
$G(\mathbb{F})$	good set du feuilletage $\mathbb{F}$ (p. **77**)

Table des catégories utilisées

Objets	**Morphismes**	**Symbole**
ensembles	applications	$\mathfrak{S}$
espaces topologiques	applications continues	$\mathfrak{T}$
espaces topologiques séparés	applications continues	$\mathfrak{T}_s$
espaces topologiques localement compacts	applications continues discrètes	$\mathfrak{T}_{\mathrm{lc}}^{\mathrm{d}}$
espaces complexes réduits	applications holomorphes	$\mathfrak{K}$
	applications holomorphes discrètes ouvertes	$\mathfrak{K}^{\mathrm{do}}$
	applications holomorphes discrètes ouvertes surjectives	$\mathfrak{K}^{\mathrm{dos}}$
	applications holomorphes finies ouvertes	$\mathfrak{K}^{\mathrm{fo}}$
	applications holomorphes finies ouvertes surjectives	$\mathfrak{K}^{\mathrm{fos}}$
germes d'espace topologique	germes d'application continue	$\mathfrak{T}_{\mathrm{g}}$
germes d'espace topologique localement compact	germes d'application continue discrète	$\mathfrak{T}_{\mathrm{lc,g}}^{\mathrm{d}}$
germes d'espace complexe réduit	germes d'application holomorphe	$\mathfrak{K}_{\mathrm{g}}$
	germes d'application holomorphe discrète	$\mathfrak{K}_{\mathrm{g}}^{\mathrm{d}}$
	germes d'application holomorphe discrète ouverte[1]	$\mathfrak{K}_{\mathrm{g}}^{\mathrm{do}}$

[1] Un germe d'application continue entre deux espaces topologiques est ouvert s'il possède un représentant ouvert.

Index

CURRICULUM VITAE

Formations

1998-2002	**Doctorat** en mathématiques à l'Université de Fribourg sous la direction du Prof. Burchard Kaup
1998-2001	**Diplôme** de maître de gymnase en mathématiques.
1994-1998	**Diplôme** de mathématiques avec physique comme branche secondaire.
1994	**Baccalauréat**, type C, obtenu au Collège St-Michel de Fribourg.

Expériences professionnelles

Depuis octobre 1996, tuteur puis **assistant** en mathématiques à l'Université de Fribourg avec pour tâches la gestion de séances d'exercices (jusqu'à 100 étudiants) et le remplacement ponctuel du professeur pour les cours ex-cathedra.

Depuis octobre 2000, **responsable** de la bibliothèque du Département de Mathématiques de l'Université de Fribourg (collection de 16'000 livres et arrivée de 600 périodiques par année).

De janvier 1995 à juin 1998, **enseignant** en mathématiques et en physique à la Nouvelle Ecole Descartes de Granges-Paccot (6,5 périodes/semaine) ainsi que pour des cours privés et des remplacements.

Membre du comité d'**organisation** du Valete 1993 (fête de fin d'année du Collège St-Michel) avec 10'000 entrées enregistrées en deux soirs.

De juillet 1991 à janvier 1995, **vendeur** "fruits et légumes" au supermarché de La Placette, Fribourg (samedis et vacances scolaires).

Connaissances complémentaires

Connaissances en informatique: programmation en Matlab et Mathematica , HTML, Latex, gestion de base de données FileMaker, travail sur plateforme Mac et PC.

Cours d'introduction à la modélisation climatique (Dr. Goyette, Département de Géographie de l'Université de Fribourg).

Activités non professionnelles

Depuis 1983, membre du Judo Club Fribourg (entraineur des enfants durant 8 ans, vice-président et responsable du matériel durant 2 ans, combattant de l'équipe).

Depuis 2001, chef de course à la section Moléson du Club Alpin Suisse.

Données personnelles

Nom
Laurent Karth

Date de naissance
4 février 1975

Etat civil
Célibataire

Nationalité
Suisse

Lieu d'origine
Lessoc (Fribourg)

Adresse
Ch. des Rosiers 4
1700 Fribourg
Tél : 026 422 27 17

E-mail
laurent.karth@gmx.ch

Langues
- Français (langue maternelle)
- Allemand (bon niveau oral)
- Anglais (littérature scientifique)

Intérêts
- Alpinisme
- Gastronomie
- Activités manuelles